

СОДЕРЖАНИЕ (часть 1)

Тема 1. Введение и общие положения.....5

Лекция 1. История развития вероятностных методов расчета. Детерминированные и вероятностные методы расчета. Их сравнение, задачи и методы. Предпосылки и математический аппарат, используемые в вероятностных методах расчета.....5

Тема 2. Методология анализа надежности и долговечности сооружений 12

Лекция 2. Случайный характер расчетных величин, используемых в расчетах на прочность, жесткость и устойчивость проектируемых сооружений. Основные характеристики случайных величин..... 12

Лекция 3. Кривые распределения случайных величин. Гауссовы нормальные распределения. Квантили вероятности $P(x)$. Распределение двух случайных величин. Поверхности распределения. Плотность вероятности появления случайных независимых величин..... 17

Лекция 4. Понятие надежности сооружения. Резерв прочности. Характеристика безопасности. Коэффициент запаса. Коэффициенты однородности и перегрузки.....26

Лекция 5. Сочетания постоянных нагрузок. Корреляционно не связанные нагрузки. Изменчивость полной нагрузки. Коэффициент перегрузки для полной нагрузки. Сочетания прочностных свойств. Метод статистической линеаризации.....33

Лекция 6. Нагрузки. Повторные нагружения. Определение расчетной нагрузки при многократном действии. Определение коэффициента запаса.....37

Лекция 7. Нагрузки. Нагрузки как случайные величины. Снеговые нагрузки.....41

Лекция 8. Ветровые нагрузки и нагрузки, изменяющиеся непрерывно во времени по случайному закону. Корреляционные функции. Стационарные случайные функции.....47

Лекция 9. Исследование прочности статически определимых систем. Распределение плотности вероятности прочности конструкции. 55

(часть 2)

Тема 3: Элементы теории усталости. Усталостное разрушение

как случайный процесс.....	63
Лекции 10,11. Основные понятия теории усталости. Усталостное разрушение. Механизм усталостного разрушения. Кривые Велера. Факторы, влияющие на сопротивление разрушению. Влияние концентрации напряжений, масштабный фактор и другие.....	63
Лекции 12,13. Модель процесса накопления усталостных повреждений. Основы статистической теории усталостного разрушения и примеры ее применения для исследований прочности. Оценка долговечности при различных гипотезах накопления усталостных повреждений.....	75
Тема 4: Основы теории надежности. Приложение ее к вопросам прочности	
Лекции 14,15. Основные понятия. Надежность, мера надежности, долговечность и нормативный ресурс. Задачи теории надежности. Определение надежности системы по надежности ее элементов.....	90
Лекции 16,17. Надежность последовательного, параллельного и смешанного соединения элементов. Другие задачи теории надежности в приложении ее к вопросам прочности сооружений как системы связанных элементов.....	102
Тема 5: Задачи и вероятностные методы их решения на основе статистического моделирования случайных величин и случайных процессов.....	122
Лекции 18,19. Определение статистических характеристик прочности. Определение статистических характеристик внешних нагрузок.....	122
Лекции 20,21. Определение средней долговечности при действии циклических напряжений со случайными амплитудами.....	149
Лекции 22,23. Методы вычисления надежности и коэффициентов запаса. Выбор нормативного коэффициента запаса. Коэффициенты запаса в практических расчетах.....	165
Лекции 24,25,26. Современные методы моделирования случайных процессов и величин при решении задач строительной механики расчета и проектирования сооружений.....	188
Литература.....	217
Приложение.....	218

Тема 1. Введение и общие положения

Лекция 1. История развития вероятностных методов расчета. Детерминированные и вероятностные методы расчета. Их сравнение, задачи и методы. Предпосылки и математический аппарат, используемые в вероятностных методах расчета

Строительная механика как наука о прочности, жесткости и устойчивости сооружений, находящихся под различными воздействиями, выделилась из общей механики благодаря работам Г. Галилея. Это не означает, что до его работы, посвященной расчету корпуса корабля на прочность, человечество не имело в своем распоряжении каких-либо знаний и методов строительства. Но эти методы, основанные на интуиции и печальном опыте обрушений неудачно выполненных сооружений, позволяли еще в древности создавать долговечные грандиозные и совершенные в конструктивном исполнении памятники архитектуры. Строгий научный подход к решению задач, характерный для XIX столетия, и развитие методов математической физики, сильно потеснили интуитивные методы, но не могли исключить необходимость учета случайного характера многих параметров расчетных моделей на стадии принятия и оценки надежности решений при проектировании сооружений.

Реальное сооружение и его условия эксплуатации отличаются от идеализированной расчетной модели и условий, рассматриваемых на стадии проектирования. Фактические напряжения, деформации и перемещения являются случайными величинами из-за случайного характера внешних воздействий, прочностных и др. внешних условий. **Поэтому надежность результатов расчета и, в конечном счете, конструкции, должна быть определена с помощью вероятностных методов строительной механики с привлечением методов теории вероятностей.**

Обычный подход к расчету конструкций состоит из двух этапов.

1. Для заданной расчетной модели вычисляются напряжения, деформации и перемещения в элементах конструкций, подверженных действию различных внешних нагрузок. Эта задача решается методами строительной механики, теории упругости, теории пластичности и т.д. Такой подход называется **детерминистическим**.

2. Вычисленные величины сопоставляются с нормативно допустимыми значениями. При этом решается задача надежности, долговечности и экономичности конструкции. Обычно для решения этих задач сначала использовался **метод допускаемых напряжений** для определения коэффициентов запаса прочности. Он заключался в том, что для любого волокна конструкции должно было выполняться условие

$$k S \leq S_{\text{доп}}, \quad (1.1)$$

где $S_{\text{доп}}$ – допускаемое напряжение; S – напряжение в волокне, определяемое методами строительной механики; k – коэффициент запаса.

В 1930-е годы по различным спорным вопросам, связанным с вероятностно-статистическим представлением снеговых и ветровых нагрузок, проявились существенные противоречия метода допускаемых напряжений при определении коэффициентов запаса прочности.

В 1945 году метод допускаемых напряжений уступил место другому методу, снимавшему частично эти противоречия, и получил название **«Метод предельных состояний»**. Общий коэффициент запаса был расчленен на три коэффициента: однородности материала, перегрузки и условий работы. Таким образом, вероятностная оценка общих коэффициентов запаса прочности была расчленена на три независимых оценки, учитывающих различную изменчивость прочностных характеристик материалов, величин и характера нагрузок. При этом предполагалось, что в расчлененном варианте решение неопределенностей будет точнее. В 1955 году метод, благодаря работам Н.С. Стрелецкого, был включен в «Строительные нормы и правила СССР» и в дальнейшем усовершенствован: система расчетных коэффициентов была расширена до пяти. Это коэффициенты **надежности по нагрузке** – γ_f , **по материалу** – γ_m , **по назначению** – γ_n , **при расчете по временному сопротивлению** – γ_u и **коэффициенты условий работы** – γ_c .

В теории вероятностей главная задача – **зная состав генеральной совокупности, изучить распределения для состава случайной выборки**. Получение закона распределения случайных величин – это прямая задача теории вероятностей. **Генеральная совокупность** – совокупность элементов, удовлетворяющих неким заданным условиям (именуется также изучаемой совокупностью), состоит из всех объектов, которые подлежат изучению. Это могут быть дискретные или непрерывные в заданном интервале или на бесконечности случайные величины. **Состав генеральной совокупности** зависит от целей исследования. Примерами для дискретных величин могут быть **биномиальное распределение (Бернулли)**. Например: X – количество «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких что вероятность «успеха» в каждом из них – p . $q = 1 - p$ – вероятность «неуспеха».

Закон распределения X имеет вид:

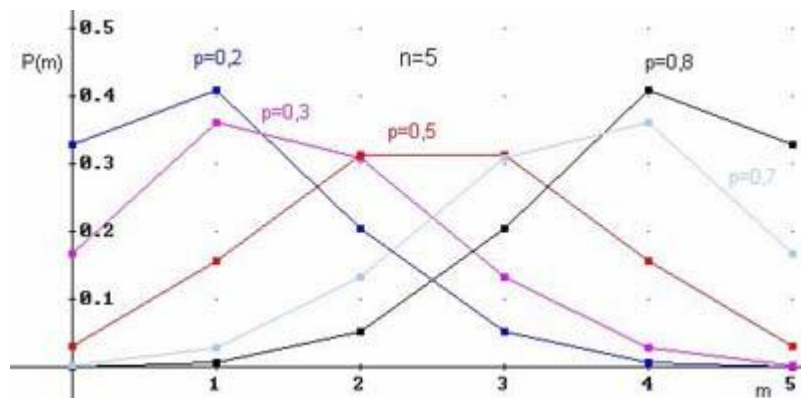
x_k	0	1	k	n
p_k	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$		$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$		p^n

Здесь вероятности находятся по формуле Бернулли:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1.2)$$

Характеристики: $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$. (1.3)

Примеры многоугольников распределения для $n = 5$ и различных вероятностей:



Дискретное Пуассоновское распределение моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга. Например: число опаздывающих на занятия студентов за неделю.

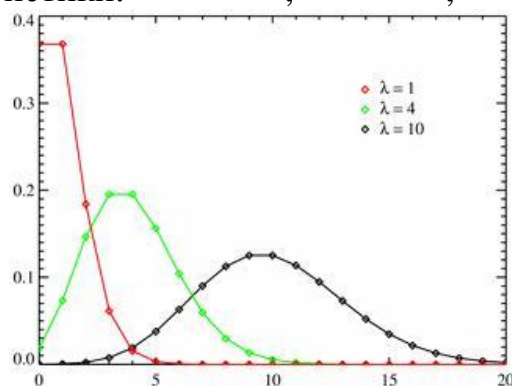
При условии $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $np \rightarrow \lambda = const$ закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона. Так как при этом вероятность P события A в каждом испытании мала, то закон распределения Пуассона называют часто законом редких явлений.

Ряд распределения:

x_k	0	1	k
P_k	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Вероятности вычисляются по формуле Пуассона: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. (1.4)

Числовые характеристики: $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$. (1.5)



Разные многоугольники распределения при $\lambda=1,4,10$.

Показательное распределение (непрерывное)

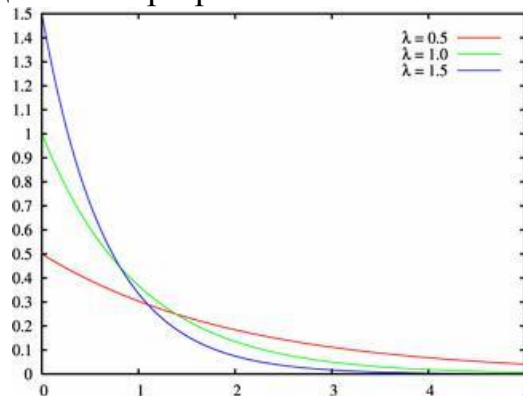
Экспоненциальное или показательное распределение – абсолютно непрерывное распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

Плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{где } \lambda > 0. \quad (1.6)$$

Числовые характеристики: $M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$ (1.7)

Плотность распределения при различных значениях $\lambda > 0$:



Равномерное распределение (непрерывное)

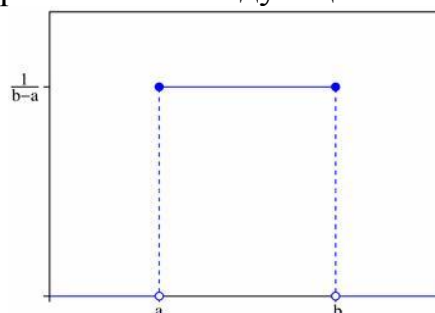
Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке $[-0,5; 0,5]$), в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчиненных заданному распределению.

Плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \quad (1.8)$$

Числовые характеристики: $M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$ (1.9)

График плотности вероятностей следующий:



Нормальное распределение или распределение Гаусса (непрерывное)

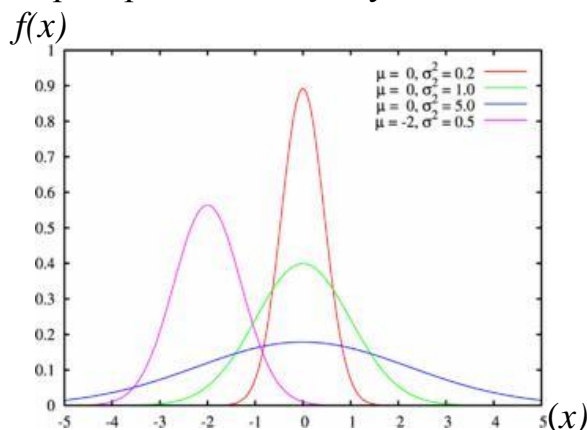
Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса, – распределение вероятностей, которое играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике. Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех. Ясно, что такая ситуация крайне распространена, поэтому можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение – отсюда и произошло одно из его названий.

Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.10)$$

Числовые характеристики: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma = \sigma$ (1.11)

Пример плотности распределения следующий:



Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется стандартным или нормированным, а соответствующая нормальная кривая – стандартной или нормированной.

Функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ (1.12)

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \quad (1.13)$$

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X на величину δ от математического ожидания (по модулю)

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \quad (1.14)$$

Когда известен состав выборки и по нему требуется определить, какой была генеральная совокупность – это обратная задача математической статистики. Или, точнее, в теории вероятностей мы, зная природу некоторого явления, выясняем, как будут вести себя (как распределены) те или иные изучаемые нами характеристики, которые можно наблюдать в экспериментах. В математической статистике наоборот – исходными являются экспериментальные данные (обычно это наблюдения над случайными величинами), а требуется вынести (с определенной вероятностью) то или иное суждение о природе рассматриваемого явления.

Основные понятия и задачи вероятностных методов строительной механики (СМ)

Надежность – свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонта и транспортирования. Иначе, **надежность** – это устойчивость качества по отношению ко всем возможным возмущениям. Надежность определяется количественными показателями (промежуток времени, число рабочих циклов, число километров и т.д.).

В зависимости от назначения системы и условий ее эксплуатации надежность включает различные свойства: 1) безотказность; 2) долговечность; 3) ремонтпригодность; 4) сохраняемость и любые их сочетания.

Безотказность – вероятность безотказной работы конструкции за определенный промежуток времени.

Долговечность – вероятный промежуток времени безотказной работы конструкции.

Ремонтпригодность – вероятность того, что неисправная система может быть восстановлена за заданное время.

Содержание теории надежности – разработка методов оценки надежности систем и создание систем, обладающих заданными показателями надежности и долговечности.

Задачи расчета на надежность:

- определение вероятности выхода конструкции из строя в заданных условиях;
- нахождение по заданной экономически целесообразной надежности требуемых размеров конструкции;
- определение допустимых нагрузок или оптимального срока эксплуатации;
- оценка надежности системы по имеющимся оценкам надежности составляющих ее элементов.

В задачу теории надежности строительных конструкций входит также обоснование процедур нормирования расчетных характеристик.

Специфика теории надежности строительных конструкций состоит в необходимости учета случайных свойств нагрузок и воздействий на сооружения, а также учета совместного действия случайных нагрузок на систему со случайными прочностными характеристиками.

Основное понятие теории надежности – **отказ** – это событие, состоящее в нарушении работоспособности системы. Понятие отказа близко по смыслу к понятию предельного состояния. К предельным состояниям 1-й группы относятся: общая потеря устойчивости формы, потеря устойчивости положения, любое разрушение, переход в изменяемую систему, качественное изменение конфигурации; состояния, при которых возникает необходимость прекращения эксплуатации в результате текучести материала, сдвига в соединениях, ползучести или чрезмерного раскрытия трещин. Предельные состояния 2-й группы – недопустимые деформации конструкции в результате прогиба, поворота или осадок, характеризующихся разностью вертикальных перемещений узлов, отнесенных к расстоянию между ними, креном сооружения в целом, относительным прогибом или выгибом, кривизной элемента, относительным углом закручивания, горизонтальным или вертикальным смещением элемента или сооружения в целом, углом перекоса или поворота. К предельным состояниям 2-й группы относятся также недопустимые колебания конструкции, изменение положения, образование или раскрытие трещин.

Примеры отказов – обрушения, опрокидывания, потеря устойчивости, хрупкое разрушение, большие деформации и прогибы, механический или коррозионный износ, растрескивание и т.д.

Отказы вызваны влиянием случайных факторов, поэтому они носят случайный характер. **За показатель (меру) надежности системы может быть принята вероятность P безотказной работы в течение всего срока службы T .**

Недостатки теории надежности – сложно получить опытные данные в количестве, достаточном для последующей их обработки методами теории вероятностей. Сложно длительный срок проводить испытания конструкции для получения надежных выводов о ее долговременной работе.

Этапы развития теории вероятностей:

1. Средневековая Европа и начало Нового времени. Главным достижением данного периода можно считать развитие комбинаторных методов, Еще в шестнадцатом веке видные математики Тарталья и Кардано в своей работе «Об азартной игре» обратились к задачам теории вероятностей в связи с игрой в кости.

2. XVII век. Паскаль (1623–1662 гг.), Ферма, Гюйгенс. Основные понятия и методы теории вероятностей для случайных величин с конечным числом значений.

3. XVIII век. Появились монографии с систематическим изложением теории вероятностей «Искусство предположений» Якоба Бернулли (1713 г.), шло развитие идей Бернулли.

4. XIX век. Идеи Бернулли далеко развили в начале XIX века Лаплас, Гаусс, Пуассон. Они же определили общие тенденции и критику. Развилась теория ошибок измерения. Появляются первые попытки применения теории вероятностей в физике. Вероятностные методы проникают в самые различные прикладные науки.

5. XX век. Строгое теоретическое обоснование было разработано только в 1929 году. Андрей Николаевич Колмогоров дал классическую аксиоматику теории вероятностей.

Основателями научной школы в области теории вероятностей в Петербургском университете были великие русские математики П.Л. Чебышев, А.М. Ляпунов и А.А. Марков. Их работы сыграли определяющую роль в развитии теории вероятностей. Им предшествовал В.Я. Буняковский, опубликовавший первый русский учебник по теории вероятностей (по которому Гаусс учился русскому языку); в частности, в этом учебнике впервые рассматривалась задача статистического контроля приемки качества продукции.

Тема 2. Методология анализа надежности и долговечности сооружений

Лекция 2. Случайный характер расчетных величин, используемых в расчетах на прочность, жесткость и устойчивость проектируемых сооружений. Основные характеристики случайных величин

Понятия и математический аппарат, используемые в вероятностных методах СМ

Событие – качественный или количественный результат опыта, осуществляемого при определенных условиях. Например, событие – попадание предела текучести стали R_y в интервал от 240 до 260 МПа.

Событие может быть **случайным, достоверным или невозможным**. Объективная математическая оценка возможности реализации случайного события – **вероятность**. **Вероятность** – есть объективная мера возможности наступления события независимо от того, является ли оно массовым или нет. В жизни все (полуинтуитивно) применяют вероятностные оценки будущим событиям и весьма успешно.

Частота события A (статистическая вероятность):

$$P^*(A) = m/n,$$

где m – число опытов, в которых наблюдается событие A ; n – общее число опытов.

Значения $P^*(A)$ – случайны:

$$P^*(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A),$$

где $P(A)$ – математическая вероятность, являющаяся **достоверной** величиной, если вероятность того, что при $n \rightarrow \infty$ $P^*(A) = P(A)$ равна 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

При $m = n$ вероятность $P(A) = 1$ – событие **достоверное**;

при $m = 0$, соответственно, $P(A) = 0$ – событие **невозможное**.

События **несовместны** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе. (Например, появление одновременно двух цифр от 1 до 6 на игральном кубике при одном его бросании.)

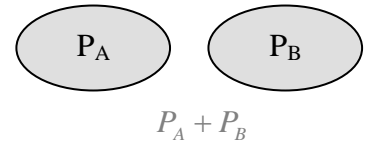
Случайные события **совместны**, если при данном испытании могут произойти оба эти события (при одновременном бросании двух кубиков).

Если события A и B несовместны, то вероятность появления **или** события A **или** события B :

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (2.1)$$

или в общем виде для n несовместных A

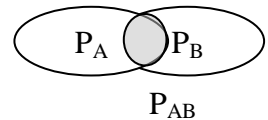
$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (2.2)$$



Сумма вероятностей двух противоположных событий

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ где } \bar{A} - \text{не } A. \quad (2.3)$$

Событие A **независимо** от B , если вероятность появления события A не зависит от того, произошло событие B или нет.



Если события A и B независимы (они совместны), то вероятность появления **и** события A , **и** события B равна:

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad (2.4)$$

а в общем виде
$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i). \quad (2.5)$$

В урне два кубика – черный и белый и два шарика – черный и белый. Вероятность появления черного кубика равна произведению вероятностей появления черного цвета и кубика, т.е. $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

Из формулы (2.4) видно, например, что если событие A (появление максимальной ветровой нагрузки) и событие B (появление максимальной снеговой нагрузки) – независимы, то вероятность одновременного появления A и B (т.е. максимумов нагрузок) меньше вероятности появления одного из событий (максимумов нагрузок) ($P_{\text{снег+ветер}}^{\max} = P_{\text{снег}}^{\max} \cdot P_{\text{ветер}}^{\max}$).

Вероятность $P(AB)$ тем меньше, чем меньше $P(A)$ и $P(B)$. А если A и B зависимы, то это учитывается условной вероятностью появления одного из них при появлении другого. Формула (2.5) иллюстрируется последовательным соединением. Вероятность неразрушения последовательной системы:

$$P = P(A_1)P(A_2)P(A_3), \quad (2.6)$$

где $P(A_i)$, $i = 1, 2, 3$ – вероятности неразрушения i -го элемента системы; A_i – событие, состоящее в неразрушении i -го элемента системы.

Пример последовательного соединения: статически определимая система, так как разрушение всей системы происходит при разрушении хотя бы одного из элементов, таким образом, вероятность неразрушения всей системы меньше вероятности неразрушения любого ее отдельного элемента.

Формула (2.4) также иллюстрируется и параллельным соединением. Вероятность разрушения параллельной системы:

$$\bar{P} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3), \quad (2.7)$$

где $P(\bar{A}_i)$, $i = 1, 3$ – вероятности разрушения i -го элемента системы.

Вероятность неразрушения параллельной системы:

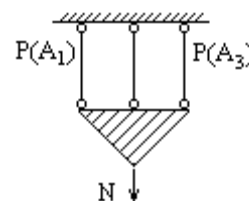
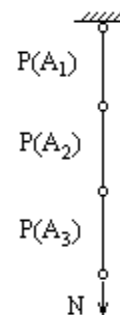
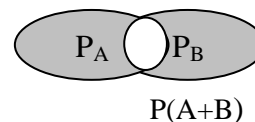
$$P = 1 - \bar{P} = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)), \quad (2.8)$$

или в общем виде:
$$P = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)). \quad (2.9)$$

Пример параллельного соединения: статически неопределимая система, так как разрушение всей системы происходит при разрушении всех избыточных и еще одной связей. Таким образом, вероятность неразрушения всей системы больше вероятности неразрушения любого ее отдельного элемента. Однако в действительности в статически неопределимой системе вероятности разрушения элементов системы **н**езависимы, так как разрушение одного элемента из-за перераспределения усилий приводит к изменению вероятностей разрушения остальных элементов.

Например, при диаграмме Прандтля «условное» разрушение одного элемента статически неопределимой системы (т.е. напряжение в этом элементе при увеличении N остается постоянным и равным R_y) в меньшей степени приводит к перераспределению усилий, а, следовательно, и к изменению вероятностей разрушения. Таким образом, статически неопределимая система со стержнями, работающими по диаграмме Прандтля, больше подходит в качестве примера для параллельной системы.

Если случайные события A и B совместны (и независимы), то вероятность появления **или** A **или** B :



$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) , \quad (2.10)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \prod_{i=1}^n P(A_i) . \quad (2.11)$$

Если случайные события A и B зависимы (и совместны) и вероятности их появления $P(A)$ и $P(B)$, то вероятность совмещения событий A и B (произойдет и A и B):

$$P(AB) = P(A)P(B/A) , \quad (2.12)$$

где $P(B/A)$ – условная вероятность, т.е. вероятность появления события B , при условии, что событие A произошло. Аналогично

$$P(AB) = P(B)P(A/B) . \quad (2.13)$$

Например, в урне два черных и два белых шара. Событие A – появление белого шара с первого раза, событие B – появление белого шара со второго раза. Вероятность появления белого шара два раза подряд определяется формулой:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6.$$

Из формул (2.12) и (2.13) можно получить:

$$P(A/B) = P(A) \frac{P(B/A)}{P(B)} , \quad (2.14)$$

где $P(A)$ – априорная вероятность появления события A , определенная до того как стала известна информация о событии B ; $P(A/B)$ – апостериорная вероятность появления события A , основанная на той информации, что A и B произошли, но мы определяем вероятность того, что перед B было A .

Если A и B независимы, то $P(A/B) = P(A)$ и наоборот.

Пусть имеется n несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n с вероятностями их появления $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ и пусть $P(B/A_1), P(B/A_2), \dots, P(B/A_n)$ – условные вероятности осуществления события B с одним из n событий A_1, A_2, \dots, A_n . То есть события B и A_1 , B и A_2, \dots, B и A_n – зависимы и совместны. Тогда вероятность осуществления события B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i) . \quad (2.15)$$

Это формула полной вероятности, где $P(A_i)P(B/A_i)$ – вероятность того, что произойдет B и A_i ; $P(B)$ – по другому – вероятность того, что B произойдет с любым из A_i .

Пусть событие B произошло, это изменит вероятности $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$. Надо найти условные вероятности $P(A_1/B), P(A_2/B), \dots, P(A_n/B)$ осуществления события A_i , $i=1, \dots, n$ при условии, что B произошло (т.е. если B произошло, то надо найти вероятность того, что ему предшествовало появление именно события A_i).

Формула полной вероятности Байеса (из (2.15) и (2.14)):

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B / A_j)}, \quad (2.16)$$

где $P(A_i)$ – вероятность появления события A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) до того как произошло B ; $P(A_i / B)$ – как бы является удельным весом вероятности $P(A_i)$ в сумме всех вероятностей $P(A_j)$, $j = 1, n$).

Производится n независимых опытов, имеющих два возможных исхода – появление и непоявление события A (вероятность появления p , непоявления $q = 1 - p$). Вероятность того, что при n испытаниях событие A наступает m раз:

(формула Бернулли):

$$P_n^m(A) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (2.17)$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-[m-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$ – число сочетаний из m элементов в n .

Пример. $C_{90}^3 = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$; $C_{10}^1 = 10/1$; $C_{100}^4 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$;

$$C_n^m = C_n^{n-m}; C_n^0 = C_n^n = 1; C_n^1 = n; C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}, \quad 0 < m < n.$$

Вероятность $P_n^1(A)$ того, что в результате n независимых опытов событие A произойдет хотя бы один раз (может и больше): $P_n(A) = 1 - q^n$, где q – вероятность непоявления события A в первом испытании; q^n – вероятность того, что A не произойдет ни разу; $1 - q^n$ – вероятность того, что A произойдет один раз, или два раза ... или все n раз.

Пример. Событие A – разрушение здания в сейсмическом районе, $p = 0,1$ – вероятность разрушения его в течение первого года. Тогда $q = 1 - p$ – вероятность неразрушения в течение первого года. Тогда $P_2(A) = 1 - 0.9^2 = 0.19$, $P_3(A) = 1 - 0.9^3 = 0.271$, $P_{10}(A) = 1 - 0.9^{10} = 0.651$, $P_{20}(A) = 1 - 0.9^{20} = 0.878$, $P_{50}(A) = 1 - 0.9^{50} = 0.995$, где $P_n(A)$ – вероятности разрушения здания за n лет.

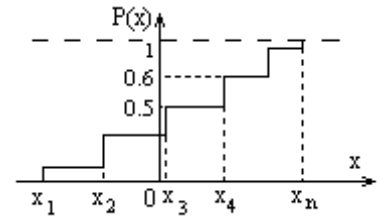
Таким образом функция надежности (зависимость вероятности неразрушения от пройденного количества лет) от значения 1 асимптотически приближается к оси OX . $(1 - P(A))$ – вероятность неразрушения.

Лекция 3. Кривые распределения случайных величин. Гауссовы нормальные распределения. Квантили вероятности P_x . Распределение двух случайных величин. Поверхности распределения. Плотность вероятности появления случайных независимых величин

3.1. Одномерная случайная величина (с.в.)

Случайная величина X (одномерная) – величина, которая может принять различные вероятные значения x на некотором интервале $(-\infty \leq x \leq \infty)$, т.е. x – возможное значение с.в. X .

Случайная величина может быть дискретной и непрерывной. Вероятностные свойства с.в. X характеризуются **интегральной функцией распределения $P(x)$** . Значение функции $P(x)$ **равно вероятности обнаружить с.в. $X < x$** (или, что то же, на интервале $-\infty, x$), т.е. $P(x) = \text{Prob}(X < x)$, где x – конкретная детерминированная величина.



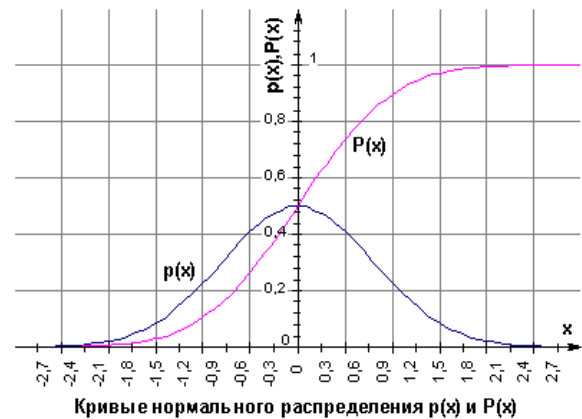
Если с.в. X может принимать лишь дискретные значения x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n , то функция распределения представляет собой сумму вероятностей тех значений x_k , которые меньше x .

$$P(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \quad (3.1)$$

На рисунке $\text{Prob}(X \leq x_3) = P(x_3) = 0,5$ (т.е. $X = x_1$ или $X = x_2$ или $X = x_3$). $\text{Prob}(X = x_4) = 0,6 - 0,5 = 0,1$ (скачок равен вероятности появления значения x_4). Функция распределения числа m наступления события в последовательности n независимых испытаний, согласно формуле (2.17).

Биномиальный закон распределения:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \sum_{n < x} C_n^m p^m q^{n-m}, & \text{при } 0 < x \leq n; \\ 1 & \text{при } x > n, \text{ где } q = 1 - p. \end{cases} \quad (3.2)$$



$X = np$, $D_x = npq$. (Математическое ожидание (м.о.) и дисперсия с.в.)

Если с.в. X непрерывна, то функция распределения имеет колоколообразный вид, показанный на рисунке.

Наиболее часто для описания распределения случайных величин используется нормальное или гауссово распределение:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{x}}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\hat{x}}}.$$

Коэффициент нормирует площадь кривой распределения симметричной относительно $x = \bar{x}$ (центра распределения или м.о.),

$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx$, а $\hat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p_x(x) dx$ – дисперсия, характеризующая

разброс с.в. относительно м.о. в виде средне квадратичного отклонения (стандарта с.в.) $\sigma(x) = \sqrt{\hat{x}}$.

Интегральная кривая нормального распределения:

$$P_x(x) = \int_{-\infty}^x p_x(x) dx = \frac{1}{2} + \Phi(\gamma), \text{ где } \gamma - \text{новая переменная } \gamma = (x - \bar{x}) / \hat{x},$$

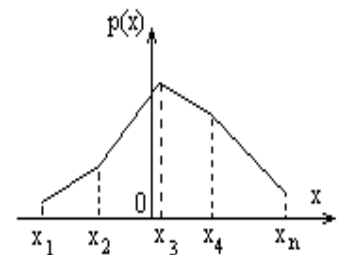
а $\Phi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{\gamma^2}{2}} dx$ – интеграл вероятности Гаусса.

Свойства функции распределения:

- 1) $P(x)$ – неубывающая функция аргумента x
(т.е. при $x_2 > x_1$ $P(x_2) = \text{Prob}(X < x_2) > P(x_1) = \text{Prob}(X < x_1)$);
 - 2) при $x = -\infty$ $P(x) = 0$;
 - 3) при $x = +\infty$ $P(x) = 1$;
 - 4) $\text{Prob}(x_1 < X \leq x_2) = P(x_2) - P(x_1)$;
 - 5) $\text{Prob}(X = x_1) = 0$.
- (3.3)

Вероятность обнаружить число, например, 241.000... ∞ , равно 0. Однако, делая измерения, мы округляем значения, тем самым, увеличивая вероятность их появления. Например, округленное 241.0 содержит значения от 240.9500... ∞ до 241.04999... ∞ и вероятность попадания числа в этот интервал не равна 0.

Распределение с.в. X характеризуется также **функцией плотности распределения с.в. $p(x)$** . Для дискретных значений с.в. функция плотности распределения может задаваться таблично. График функции $p(x) = p_i$ при $x = x_i$ изображен на рисунке.



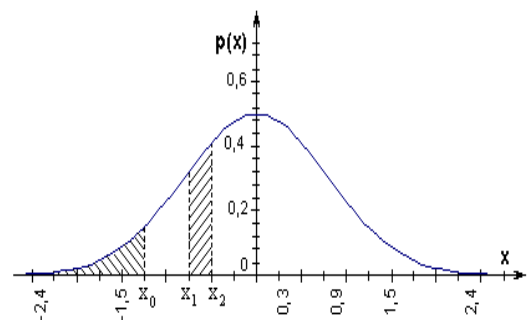
Так как возможные значения с.в. x_i образуют полную группу несовместных событий (т.е. в каждом из n испытаний с.в. обязательно примет одно из значений x_i с определенной вероятностью), то $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, где n – число испытаний.

Для непрерывной с.в. функция плотности распределения имеет вид, показанный на рисунке.

Если функция распределения с.в. $P(x)$ – непрерывна, то

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}, \quad (3.4)$$

или
$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{dP(x)}{dx}.$$



По непрерывной кривой плотности распределения, в отличие от дискретной, вероятность обнаружить точное число x_2 равна нулю. При помощи функции $p(x)$ вероятность обнаружить с.в. X в бесконечно малом интервале $x < X < x + dx$ равна $\text{Prob}(x < X < x + dx) = p(x)dx$ (площадь прямоугольника, $dx \rightarrow 0$). То же в конечном интервале $x_1 < X < x_2$:

$$\text{Prob}(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx. \quad (3.5)$$

Геометрически – это заштрихованная площадь под кривой плотности распределения.

Из (3.4) следует, что

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx, \quad (3.6)$$

поэтому функцию распределения называют еще интегральной функцией распределения.

Свойства функции плотности распределения

1. Плотность распределения вероятностей – неотрицательная функция $p(x) \geq 0$.

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1, \quad (3.7)$$

что эквивалентно $P(\infty)=1$.

3. Размерность $p(x)$ обратная размерности с.в., а $P(x)$ – безразмерна.

4. Числовые характеристики распределения.

Математическое ожидание с.в. X :

– дискретной
$$M(x) = \sum_{i=1}^m x_i p_i, \quad (3.8)$$

при этом $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ ($M(x)$ – случайна при $n \neq \infty$);

– непрерывной
$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (3.9)$$

Математическое ожидание \bar{X} – достоверная величина, так как вероятность того, что при $n=\infty$ испытаниях мы получим среднее арифметическое $M(X)=\bar{X}$ равна 1.

$M(c)=c$, $M(cx) = cM(x)$, где c – неслучайное число.

Для независимых с.в. X_1 и X_2

$$M(x_1+x_2)=M(x_1)+M(x_2), \quad M(x_1x_2)=M(x_1)M(x_2), \quad M(x^2)=[M(x)]^2+D(x).$$

К математическому ожиданию стремится среднее арифметическое наблюдаемых значений с.в. при количестве испытаний $n \rightarrow \infty$.
Геометрически м.о. – это абсцисса центра тяжести (ц.т.) площади под кривой плотности распределения. Размерность м.о. совпадает с размерностью с.в.

Дисперсия с.в. X – м.о. квадрата отклонения с.в. X от ее м.о. (центра распределения):

$$D(x)=M[x-M(x)]^2=M(x^2)-M^2(x),$$

так как $M[x-M(x)]^2=M[x^2-2xM(x)+M^2(x)]=M(x^2)-2M^2(x)+M^2(x)$,

$$M[2xM(x)]=2M^2(x) \text{ и } M[M(x)]=M(x).$$

Дисперсия дискретной с.в. X

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 p_i \quad (3.10)$$

случайна при $n \neq \infty$.

Дисперсия непрерывной с.в. X :

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - \bar{x}^2 \quad (3.11)$$

(дисперсия непрерывной с.в. – достоверна).

$D(x) = M[(x - \bar{X})^2]$, при $\bar{X} = 0$ $D(x) = M(X^2)$, \bar{X} – математическое ожидание.

Дисперсия характеризует разброс с.в. вокруг ее среднего значения (математического ожидания).

$$D(c) = 0,$$

$$D(cx) = c^2 D(x),$$

$$D(c+x) = D(x).$$

Доказательство.

$$D(cx) = M[cx - M(cx)]^2 = M[c^2 x^2 - 2cxM(cx) + M^2(cx)] = c^2 M(x^2) - M[2c^2 xM(x)] + M[c^2 M^2(x)] = c^2 M(x^2) - 2c^2 M^2(x) + c^2 M^2(x) = c^2 [M(x^2) - M^2(x)] = c^2 D(x).$$

$$D(c+x) = M[c+x - M(c+x)]^2 = M[c+x-c-M(x)]^2 = M[x-M(x)]^2 = D(x).$$

Для независимых с.в. X_1 и X_2 $D(x_1 \pm x_2) = D(x_1) + D(x_2)$.

Геометрически дисперсия – это центральный момент инерции площади под кривой плотности распределения. Размерность дисперсии – квадрат размерности с.в.

Среднеквадратическое отклонение (стандарт): $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Асимметрия непрерывной с.в. X :

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^3 p(x) dx. \quad (3.12)$$

Если с.в. X распределена симметрично относительно своего м.о., то $A(x) = 0$.

Коэффициент изменчивости (вариации) с.в. X – отношение стандарта к м.о.:

$$V(x) = \sigma(x) / \bar{X} < 1. \quad (3.13)$$

Коэффициент эксцесса (коэффициент островершинности) в теории вероятностей – мера остроты пика распределения случайной величины.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

$$\mu_r = M\left([X - M(X)]^r\right), \text{ центральный момент } r\text{-го порядка случайной величины.}$$

В частности, второй центральный момент – это дисперсия:

$$\mu_2 = M\left([X - M(X)]^2\right) = D(X), \quad \sigma = \sqrt{D[X]} - \text{стандартное отклонение } X.$$

«Минус три» в конце формулы введено для того, чтобы коэффициент эксцесса нормального распределения был равен нулю. Он положителен, если пик распределения около математического ожидания острый, и отрицателен, если пик гладкий (см. Приложение).

Квантиль (или *квантиль порядка α*) – числовая характеристика закона распределения случайной величины; это такое число, что данная случайная величина попадает левее его с вероятностью, не превосходящей α . Квантиль первого порядка $P(x)$ – обратная функция зависимости x от $P(x)$.

α -**квантиль** случайной величины ξ с функцией распределения $F(x) = P\{\xi < x\}$ – это любое число x_α , удовлетворяющее двум условиям:

- 1) $F(x_\alpha) \leq \alpha$;
- 2) $F(x_\alpha + 0) \geq \alpha$.

Заметим, что данные условия эквивалентны следующим:

$$P(\xi < x_\alpha) \leq \alpha \text{ и } P(\xi > x_\alpha) \leq 1 - \alpha.$$

Если $F(x)$ – непрерывная строго монотонная функция, то существует единственный квантиль x_α любого порядка $\alpha \in (0, 1)$, который однозначно определяется из уравнения $F(x_\alpha) = \alpha$, и, следовательно, выражается через функцию, обратную к функции распределения:

$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha).$$

Кроме указанной ситуации, когда уравнение $F(x_\alpha) = \alpha$ имеет единственное решение (которое и дает соответствующий квантиль), возможны также две других ситуации:

1) если указанное уравнение *не имеет решений*, то это означает, что существует единственная точка x_α , в которой функция распределения имеет разрыв, которая удовлетворяет данному определению и является квантилем порядка α . Для этой точки выполнены соотношения: $P(\xi < x_\alpha) < \alpha$ и $P(\xi > x_\alpha) \leq 1 - \alpha$ (первое неравенство строгое, а второе может быть как строгим, так и обращаться в равенство);

2) если уравнение имеет *более одного решения*, то все его решения образуют интервал, на котором функция распределения постоянна. В качестве квантиля порядка α может быть взята любая точка этого интервала. Содержательные выводы, в которых участвует квантиль, от этого существенно не изменятся, поскольку вероятность попадания случайной величины ξ в данный интервал равна нулю.

3.2. Случайная векторная величина двух измерений

На практике решаются задачи, в которых результат опыта описывается не одной с.в., а двумя или более с.в., образующими систему. При этом свойства системы нескольких с.в. могут включать и взаимные связи (зависимости) между ними.

Если с.в. X и Y принимают дискретные значения x_i , y_j и каждой паре значений (x_i, y_j) соответствует определенная вероятность p_{ij} , то можно составить таблицу распределения вероятностей дискретной двумерной с.в.

	X_1	X_2	...	X_n
Y_1	P_{11}	P_{21}	...	P_{n1}
Y_2	P_{12}	P_{22}	...	P_{n2}
...
Y_m	P_{1m}	P_{2m}	...	P_{nm}

Очевидно $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$.

Значение функции $P(x,y)$ равно вероятности обнаружить с.в. $X < x$ и с.в. $Y < y$, т.е.

$$P(x,y) = \text{Prob}(X < x, Y < y).$$

Свойства функции распределения $P(x,y)$:

- 1) $P(x,y)$ – неубывающая функция своих аргументов, т.е. при $x_2 > x_1$ $P(x_2,y) > P(x_1,y)$ или при $y_2 > y_1$ $P(x,y_2) > P(x,y_1)$;
- 2) $P(x, -\infty) = P(-\infty, y) = P(-\infty, -\infty) = 0$;
- 3) $P(x, +\infty) = P(x)$, $P(+\infty, y) = P(y)$ – если один из аргументов равен $+\infty$, то функция распределения $P(x,y)$ превращается в функцию распределения другой с.в.;
- 4) $P(+\infty, +\infty) = 1$.

Плотность распределения системы двух с.в. (вторая смешанная производная $P(x,y)$ по ∂x и затем по ∂y).

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.14) \equiv (3.4)$$

или в общем виде

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n P(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}.$$

Геометрически $p(x,y)$ можно представить поверхностью (поверхность распределения – по OX и OY откладываются значения с.в. X и Y , по Z – вероятность их появления, рисунок).

Из (3.14) следует

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(x, y) dx dy. \quad (3.15) \equiv (3.6)$$

Вероятность обнаружить двумерную с.в. (X,Y) в области D :

$$\text{Prob}((X,Y) \in D) = \iint_D p(x, y) dx dy. \quad (3.16) = (3.5)$$

Вероятность обнаружить точку M с координатами x_1, x_2, \dots, x_n в n -мерном объеме V :

$$\text{Prob}(M \in V) = \int_V \dots \int p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (3.17)$$

Далее, аналогично (3.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1, \quad (3.18)$$

т.е. геометрически объем под поверхностью распределения равен 1.

В общем виде имеем n -кратный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (3.19)$$

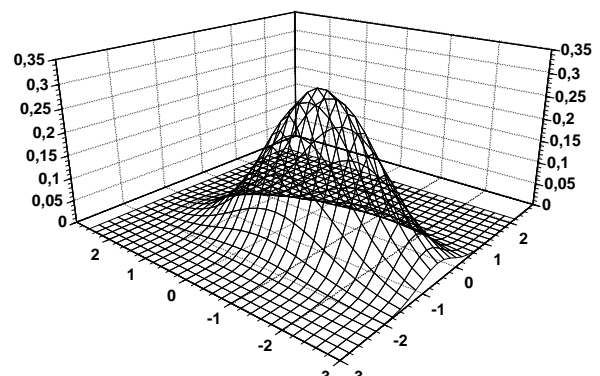
Если известен закон распределения **системы двух случайных величин** $p(x,y)$, то можно определить законы распределения отдельных величин, входящих в систему:

$$\begin{cases} p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dy \\ p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dx \end{cases} . \quad (3.20)$$

То же, в общем виде:

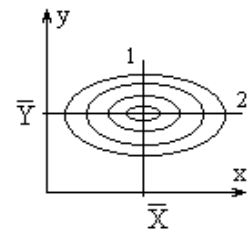
$$p(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n . \quad (3.21)$$

Но для того, чтобы по заданным законам распределения отдельных с.в., входящих в систему, определить законы распределения системы с.в., надо знать зависимость между величинами, входящими в систему. Условный закон распределения с.в. X , входящей в систему (X,Y) – закон ее распределения, вычисленный при условии, что другая с.в. Y приняла определенное значение. Условный закон распределения можно задавать

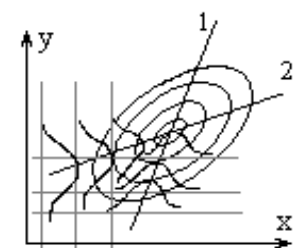


Поверхность плотности

функцией $P(x/y)$ и плотностью $p(x/y)$ распределения. Геометрически функция плотности распределения $p(x/y)$ представляет собой сечение поверхности распределения при $y=const$. Сечения Поверхности распределения плоскостями $x=const$ и $y=const$ дают, соответственно, условные плотности распределения $p(y/x)$ величины Y при определенных значениях x и условные плотности распределения $p(x/y)$ величины X при определенных значениях y . Если X и Y – зависимые с.в., то кривые плотности распределения $p(y/x)$ изменяются при изменении x , а кривые плотности распределения $p(x/y)$ изменяются при изменении y . М.о. этих кривых при таких изменениях образуют линии регрессии 1 и 2. В случае независимости X и Y линии регрессии представляют собой прямые $x = \bar{X}$ и $y = \bar{Y}$, параллельные осям координат. При наличии функциональной связи (а не стохастической) между X и Y обе линии регрессии сливаются в одну – $y=y(x)$, при этом поверхность плотности распределения может быть заменена кривой плотности распределения X или Y вдоль линии $y=y(x)$.



Линии регрессии для независимых с.в. X и Y



Линии регрессии зависимых с.в. X и Y

С учетом вышесказанного, плотность распределения системы двух с.в. равна плотности распределения одной из них, умноженной на условную плотность распределения другой величины, вычисленную при условии, что первая величина приняла заданное значение:

$$p(x,y)=p(x)p(y/x) , \quad (3.22)=(2.12)$$

или в общем случае

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_i/x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) p(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n). \quad (3.23)$$

Для независимых с.в.

$$p(x,y)=p(x)p(y) \quad (3.24)=(2.4)$$

плотность распределения системы независимых с.в. равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в систему.

3.3. Числовые характеристики распределения системы двух случайных величин

$$1. \text{ М.о.} \quad \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x, y) dx dy, \quad \bar{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p(x, y) dx dy \quad (3.25)$$

$$\text{или в общем случае} \quad \bar{X}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n . \quad (3.26)$$

Геометрически точка (\bar{X}, \bar{Y}) является проекцией на плоскость XOY центра тяжести объема, ограниченного поверхностью распределения $p(x,y)$.

2. Дисперсия:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 \cdot p(x, y) dx dy, \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{Y})^2 \cdot p(x, y) dx dy . \quad (3.27)$$

3. Корреляционный момент с.в. X и Y :

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y}) \cdot p(x, y) dx dy . \quad (3.28)$$

Корреляционный момент характеризует стохастическую зависимость между с.в. а также рассеивание. Корреляционный момент – м.о. произведения отклонений двух с.в. от их математических ожиданий $K_{xy} = M[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]$, при $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ $K_{xy} = M[XY]$.

Корреляционный момент – достоверная величина.

Если зависимости между X и Y нет, то $K_{xy}=0$, но из того, что $K_{xy}=0$ не следует независимость X и Y .

С.в. могут быть:

- 1) независимы, т.е. не коррелированы $K_{xy}=0$;
- 2) зависимы и коррелированы $K_{xy} \neq 0$;
- 3) зависимы и не коррелированы $K_{xy}=0$ (если поверхность плотности распределения симметрична относительно осей координат OX и OY , т.е. $M(X)=M(Y)=0$);
- 4) коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (3.29)$$

где σ – стандарт.

$-1 \leq r_{xy} \leq 1$ – характеризует степень тесноты линейной зависимости между с.в. $r_{xy}=1$ при $Y=aX+b$ (линейная функциональная стохастическая связь).

При нелинейной функциональной связи $r_{xy} < 1$. При отсутствии стохастической связи $r_{xy}=0$ – **необходимое, но недостаточное условие независимости X и Y .**

Систему n с.в. можно охарактеризовать n м.о. \bar{X}_i , n дисперсиями $D(X_i)$ и $n(n-1)$ корреляционными моментами $K_{X_i Y_j}$ с $i \neq j$ (при этом $K_{X_i Y_i} = K_{X_i X_i}$).

3.4. Функции случайных величин

Функция с.в. будет также случайной величиной $Y = \varphi(X)$. Ее распределение соответствует распределению аргумента, но с измененной шкалой абсцисс. $P(y) = \text{Prob}(Y < y) = \text{Prob}(\varphi(X) < y)$.

$$P(y) = \int_{-\infty}^y p[\psi(y)] |\psi'(y)| dy, \quad (3.30)=(3.6)$$

где $\psi(y)$ – функция обратная $\varphi(x)$ (замена подынтегрального выражения $x = \psi(y)$, $dx = \psi'(y)dy$).

Если $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(X)$ – монотонная функция своего аргумента, то распределение Y определяется тем, что вероятность нахождения y в пределах $y_1 < Y < y_2$ равна вероятности неравенства $x_1 < X < x_2$, где $y_1 = \varphi(x_1)$ и $y_2 = \varphi(x_2)$.

М.о. и дисперсия с.в. Y :

$$\bar{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx, \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - \bar{Y})^2 p(x) dx. \quad (3.31)=(3.9) \text{ и } (3.11)$$

Пример [7, с. 23]. Стержень нагружен изгибающим моментом M_b и крутящим моментом M_t , и есть их совместная плотность вероятности $p_q(M_b, M_t)$. Кроме того, моменты M_b и M_t случайно независимы и подчиняются центрированному нормальному распределению:

$$p_q(M_b, M_t) = \frac{1}{2\pi\sigma_b\sigma_t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{M_t^2}{\sigma_t^2}\right)\right],$$

где σ_b и σ_t – стандарты M_b и M_t .

Опасное состояние стержня достигается при превышении некоторой функцией этих моментов предельного значения $M_r > M_{r, \text{lim}}$, зависящего от свойств материала и геометрии сечения стержня. Например, для стержня круглого сечения из пластического материала эта функция может быть взята в виде $M_r = \sqrt{M_b^2 + M_t^2}$, где M_r – приведенный момент, определенный в соответствии с критерием текучести, основанном на наибольших касательных напряжениях.

Лекция 4. Понятие надежности сооружения. Резерв прочности. Характеристика безопасности. Коэффициент запаса. Коэффициенты однородности и перегрузки

Необходимый уровень надежности обеспечивается не только расчетными требованиями норм проектирования, а зависит также от методов расчета, принятой конструктивной схемы, вида соединений конструктивных элементов, правил конструирования, плана контрольных испытаний и условий приемки при изготовлении и монтаже.

Изначально до середины 30-х годов прошлого века применялся **метод допускаемых напряжений**. Он заключался в том, что для любого волокна конструкции должно было выполняться условие:

$$k S \leq S_{\text{доп}},$$

где $S_{\text{доп}}$ – допускаемое напряжение; S – напряжение в волокне, определяемое методами строительной механики; k – коэффициент запаса.

В этом методе коэффициент запаса для всех конструкций из данного материала был одинаков, что не отвечало фактической работе таких комплексных материалов, какими являются железобетон и каменная кладка, компоненты которых имеют различные механические характеристики и в соответствии с этим в различной степени и с различной быстротой исчерпывают свою несущую способность. Кроме того, работа строительных материалов в конструкциях рассматривалась лишь в упругой стадии, т.е. не учитывались пластические свойства материалов, изменчивость нагрузок и сопротивлений материалов. Поэтому метод допускаемых напряжений модифицировался в **метод разрушающих нагрузок**.

Расчетное условие этого метода в общем виде следующее:

$$k F_n < R_n,$$

где k – коэффициент запаса, зависящий от соотношения нагрузок; F_n – нормативное значение нагрузки; R_n – нормативное значение несущей способности (среднее значение прочности бетона или так называемая гарантируемая прочность стали).

Стала учитываться пластическая работа материала для определенных схем разрушения.

Введение в середине 50-х годов XX века **метода предельных состояний** позволило учесть специфику работы разных конструкций и фактическую изменчивость нагрузок и механических свойств строительных материалов и т.д., т.е. позволило достичь определенного выравнивания надежности отдельных элементов конструкции, составляющих единое целое.

Этот метод опирается на статистическое изучение значений нагрузок, механических свойств материалов и условий работы конструкций и

материалов. Общее условие непревышения предельного состояния может быть представлено в виде

$$\psi(F_p, R_p, \gamma_n, \gamma_a, \gamma_c, c) \geq 0, \quad (4.1)$$

здесь F_p – расчетное значение нагрузки;

$$F_p = F_n \gamma_f,$$

где γ_f – коэффициент надежности по нагрузке; F_n – нормативное значение нагрузки; R_p – расчетное значение сопротивления материала;

$$R_p = R_n \gamma_m;$$

R_n – нормативное значение сопротивления материала; γ_m – коэффициент надежности по материалу; γ_n – коэффициент надежности по ответственности конструкции; γ_c – коэффициент условий работы; γ_a – коэффициент точности; c – постоянные, включающие предварительно выбранные расчетные ограничения, задаваемые для некоторых видов предельных состояний (по прогибам, раскрытию трещин и т.п.).

Условие (4.1) определяет границу области допустимых состояний конструкции. Входящие в это условие факторы можно условно разделить на две группы. Первая группа факторов зависит от свойств самой конструкции, вторая от внешних воздействий. Это разделение возможно из-за отсутствия в большинстве случаев функциональных и корреляционных связей. Тогда условие (4.1) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \gamma_n \psi_q(F_p, \gamma_a, \gamma_c) \leq \psi_r(R_p) \\ \gamma_n \psi(F_p, R_p, \gamma_a, \gamma_c) \leq c \end{cases}, \quad (4.2)$$

где c – предельное значение нормируемых параметров (прогиба, угла поворота, раскрытия трещин).

Условие непревышения границы области допустимых состояний конструкций может определяться как

$$R - F > 0,$$

где с.в. R – обобщенная прочность конструкции (несущая способность);

F – обобщенная нагрузка, или иначе

$$S = R - F, \quad (4.3)$$

где F – наибольшее значение усилия (или напряжения) в конструкции, выраженное через внешнюю нагрузку (т.е. задача определения напряженного состояния предполагается решенной);

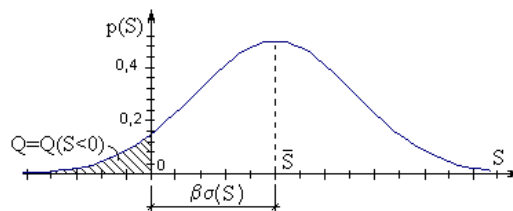
R – несущая способность, выраженная в тех же единицах, и отвечающая предельному состоянию конструкции по прочности (предел текучести, предел прочности и т.д.); **S – резерв прочности.**

Вероятность неразрушения конструкции или надежность N – это вероятность непревышения случайной величины, характеризующей предельное состояние (4.1). Если кривая распределения этой величины каким-то образом определена, то по интегральной кривой распределения вероятности P_s можно найти квантиль вероятности N того, что реализация

случайной величины S будет меньше этого квантиля, отсекая на кривой ординату $P_s = N$.

Вероятность разрушения конструкции:

$$Q = \int_{-\infty}^0 p_s(S) dS = P_s(0),$$



где $p_s(S)$ – плотность распределения резерва прочности; $P_s(0)$ – значение функции распределения резерва прочности при $S=0$ (вероятность того, что $S \leq 0$, т.е. разрушения).

Плотность распределения резерва прочности при взаимонезависимости R и F :

$$p_s(S) = \int_{-\infty}^{\infty} p_r(S+F) p_f(F) dF, \quad (4.4)$$

где $p_r(R)$ – плотность распределения несущей способности; $p_r(S+F)$ – та же функция, но с аргументом $S+F$; $p_f(F)$ – плотность распределения внешнего усилия.

При **взаимонезависимости** R и F

$$p(S+F, F) = p_r(S+F) p_f(F).$$

Эквивалентная (4.4) формула

$$p_s(S) = \int_{-\infty}^{\infty} p_r(R) p_f(R-S) dR, \quad (4.5)$$

где $p_f(R-S)$ – плотность распределения усилия, но с аргументом $(R-S)$.

В случае, когда R и F **зависимы**, (4.4) и (4.5), соответственно, запишутся в виде

$$p_s(S) = \int_{-\infty}^{\infty} p(S+F, F) dF \quad (4.6)$$

и

$$p_s(S) = \int_{-\infty}^{\infty} p(R, R-S) dR, \quad (4.7)$$

где $p(R, F)$ – функция совместной плотности распределения R и F ; $p(S+F, F)$ и $p(R, R-S)$ – то же, но с аргументами $S+F$ и $R-S$.

Характеристика безопасности

При любых законах распределения с.в. R и F м.о. и дисперсия резерва прочности S :

$$\bar{S} = \bar{R} - \bar{F}; \quad \sigma(S) = \sqrt{\sigma^2(R) + \sigma^2(F)}. \quad (4.8)$$

Для удобства вводят характеристику безопасности (при независимых R и F)

$$\beta = \frac{\bar{S}}{\sigma(S)} = \frac{\bar{R} - \bar{F}}{\sqrt{\sigma^2(R) + \sigma^2(F)}}. \quad (4.9)$$

β показывает число стандартов $\sigma(S)$, укладывающихся в интервале от S до $S = \bar{S}$ (рисунок).

Из (3.13) следует, что

$$\beta = \frac{1}{V(S)}, \quad (4.10)$$

где $V(S)$ – коэффициент вариации (изменчивости) с.в. S (резерва прочности).

Можно записать и так

$$-\beta = \frac{0 - \bar{S}}{\sigma(S)}. \quad (4.11)$$

Для функции нормального распределения S вероятность разрушения:

$$Q = Q(S < 0) = P_s(0) = \frac{1}{\sigma(S)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(S - \bar{S})^2}{2\sigma^2(S)}\right] dS. \quad (4.12)$$

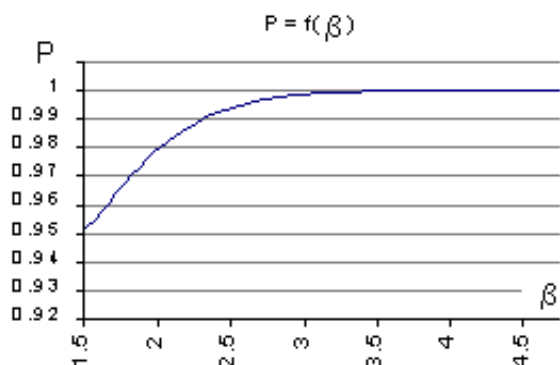
Тогда, используя новую переменную под знаком интеграла (4.12), получим

$$Q = P_s(0) = \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{(0 - \bar{S})}{\sigma(S)}\right) \right] = \left[\frac{1}{2} - \Phi(\beta) \right], \quad (4.13)$$

где $\Phi(\beta)$ – интеграл вероятности Гаусса (4.12) с аргументом β .

В таблице и на графике приведены зависимости характеристики безопасности β от вероятности разрушения Q и неразрушения P .

β	2.25	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25
Q	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}



Определять Q по (4.13) при больших β затруднительно, поэтому используется асимптотическая формула

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right). \quad (4.14)$$

Пример 1

Случайная нагрузка распределена по нормальному закону. $\bar{F}=100\text{кН}$, $\sigma(F)=10\text{ кН}$. Предел текучести $R_y=230\text{ МПа}$. Определить площадь сечения растянутого стержня A , при которой обеспечивается вероятность неразрушения $P=0.99$.

По (4.13) $P = 0.5 + \Phi(\beta) = 0.99 \rightarrow$ характеристика безопасности $\beta = 2,33$. Учитывая несущую способность $R = A \cdot R_y$ по (4.9) имеем:

$$\beta = \frac{A \cdot R_y - \bar{F}}{\sigma(F)},$$

где $\sigma(R) = \sigma(A R_y) = 0$, откуда площадь

$$A = \frac{\beta \sigma(F) + \bar{F}}{R_y} = \frac{2.33 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^4}{230 \cdot 10^6} = 5.36 \text{ (см}^2\text{)}.$$

При детерминированном расчете, усилие F определено и равно \bar{F} :

$$A = F/R_y = 4.35 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Разница результатов $\Delta = 18,8\%$.

Пример 2

Нагрузка F и предел текучести R_y – случайны, распределены нормально.

$$\bar{F} = 100 \text{ кН}, \sigma(F) = 10 \text{ кН}, \bar{R}_y = 230 \text{ МПа}, \sigma(R_y) = 10 \text{ МПа}, A = 5,36 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Определить вероятность неразрушения растянутого стержня.

Несущая способность вычисляется по формуле:

$$R = A \cdot R_y.$$

Математическое ожидание несущей способности

$$\bar{R} = A \cdot \bar{R}_y.$$

Стандарт прочности материала

$$\sigma(R) = \sigma(R_y) \cdot A.$$

Определим характеристику безопасности (4.9)

$$\beta = \frac{A \cdot \bar{R}_y - \bar{F}}{\sqrt{(A \sigma(R_y))^2 + \sigma^2(F)}} = \frac{5.36 \cdot 230 \cdot 10^2 - 100 \cdot 10^3}{\sqrt{(5.36 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^6)^2 + (10 \cdot 10^3)^2}} = \frac{29950}{11346} = 2.64.$$

По (4.13) $P = 0.5 + \Phi(2.64) = 0.9959$. Вероятность неразрушения выше, чем в первом случае, так как для разрушения и нагрузка и предел текучести одновременно должны достичь неблагоприятных значений, что менее вероятно ($Q = \text{Pr ob}(F / R_y > A)$).

Коэффициент запаса

Иногда вместо резерва прочности вводят случайный коэффициент запаса

$$K = R/F, \quad (4.15)$$

здесь K, R, F – случайные величины.

Тогда вероятность разрушения:

$$Q = Q(K < 1) = P_k(1), \quad (4.16)$$

где $P_k(1)$ – функция распределения коэффициента запаса при аргументе $K=1$.

Вероятность неразрушения:

$$P = P(K > 1). \quad (4.17)$$

М.о. коэффициента запаса (коэффициент детерминированный)

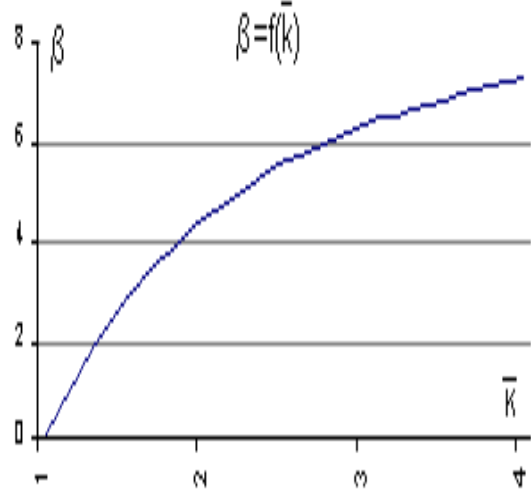
$$\bar{K} = \bar{R} / \bar{F}. \quad (4.18)$$

Разделим числитель и знаменатель правой части (4.9) на \bar{F} и используя (4.18) получим характеристику безопасности:

$$\beta = \frac{\bar{K} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma^2(F)}{\bar{F}^2} + \frac{\sigma^2(R)}{\bar{F}^2}}} = \frac{\bar{K} - 1}{\sqrt{V^2(F) + \bar{K}^2 V^2(R)}} \quad (4.19)$$

где $V(F) = \sigma(F)/\bar{F}$, $V(R) = \sigma(R)/\bar{R}$ – коэффициенты вариации усилия и несущей способности.

Введение в (4.9) значений $V(F)$ и $V(R)$ имеет то преимущество, что они могут быть сравнительно легко оценены с достаточной точностью даже при отсутствии полных статистических данных относительно с.в. R и F . Кроме того, при изменении значения нагрузки (например, в результате увеличения площади, с которой она собирается), равно как при изменении прочности несущих элементов (например, вследствие увеличения размеров поперечных сечений), коэффициенты вариации $V(F)$ и $V(R)$ остаются постоянными.



Из (4.19) при делении на \bar{K} числителя и знаменателя видно, что при $\bar{K} \rightarrow \infty \beta \rightarrow 1/V(R)$, при $\bar{K} = 1 \rightarrow \beta = 0$. Можно доказать, что при увеличении \bar{K} от 1 до ∞ β монотонно изменяется от 0 до $1/V(R)$.

Нижний предел ожидаемого значения коэффициента запаса

$$\bar{K} \geq 1 / \left[1 - V(K) \sqrt{\frac{1-Q}{Q}} \right] \quad (4.20)$$

где $V(K) = \sigma(K)/\bar{K}$ – коэффициент вариации коэффициента запаса.

Приближенно

$$V(K) \approx \frac{\sqrt{V^2(R) + V^2(F)}}{1 + V^2(F)} \quad (4.21)$$

Можно вывести приближенную формулу, связывающую характеристику безопасности β и коэффициент запаса

$$\bar{K} \approx 1 + \beta \sqrt{V^2(R) + V^2(F)} \quad (4.22)$$

Выражение (4.22) используется при небольших значениях $V(R)$ и $V(F)$, иначе

$$\bar{K} = \frac{1 + \sqrt{\beta^2 V^2(R) + \beta^2 V^2(F) - \beta^4 V^2(R) V^2(F)}}{1 - \beta^2 V^2(R)} \quad (4.23)$$

получено из (4.19).

В большинстве случаев корреляционная связь между нагрузкой и прочностью отсутствует или мала. Положительная корреляционная связь

нагрузки с прочностью имеет место, когда для более прочных элементов с бо́льшей вероятностью можно ожидать относительно бо́льших нагрузок. Отчасти это относится к статически неопределимым конструкциям, в которых бо́льшую прочность отдельных элементов можно считать связанной с их бо́льшей жесткостью, а, следовательно, и с бо́льшими воспринимаемыми усилиями. Пример отрицательной корреляционной связи – ослабленное отверстием сечение более прочно, т.е. сечение меньше, а прочность больше.

Если удастся оценить корреляционную связь R с F с помощью корреляционного момента $K(R, F)$, то характеристика безопасности аналогично как для (4.19)

$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{F}}{\sqrt{\sigma^2(F) - 2K(R, F) + \sigma^2(R)}} \quad (4.24)$$

Тогда (4.19) запишется в виде

$$\beta = \frac{\bar{K} - 1}{\sqrt{V^2(F) - 2\bar{K}V^2(R, F) + \bar{K}^2V^2(R)}} \quad (4.25)$$

где $V(R, F) = \sqrt{\frac{K(R, F)}{\bar{R} \cdot \bar{F}}}$.

Здесь $K(R, F)$ определяется по (3.28), а (4.23) запишется в виде

$$\bar{K} = \frac{1 - \beta^2 V^2(R, F) + \sqrt{\beta^2 [V^2(F) - 2V^2(R, F) + V^2(R)] - \beta^4 [V^2(R)V^2(F) - V^4(R, F)]}}{1 - \beta^2 V^2(R)} \quad (4.26)$$

получено из (4.25).

Коэффициент однородности (k_o) представляет собой отношение расчетного значения прочности к нормативной прочности $k_o = R / \bar{R}$.

Коэффициент перегрузки (k_n) представляет собой отношение расчетного значения нагрузки к нормативной нагрузке $k_n = F / \bar{F}$.

Если принять за нормативные значения м.о. случайной выборки при заданном законе распределения (в СНиП это соблюдается не строго), а расчетным значениям приписать величины, соответствующие характеристике безопасности β :

$$R = (\bar{R} - \beta\sigma(R)) / \bar{R} \quad F = (\bar{F} + \beta\sigma(F)) / \bar{F} \quad (4.27)$$

k_o и k_n можно определить по формулам:

$$k_o = 1 - \beta V(R), \text{ аналогично, } k_n = 1 + \beta V(F), \quad (4.28)$$

где $V(F) = \sigma(F) / \bar{F}$, $V(R) = \sigma(R) / \bar{R}$ - коэффициенты вариации усилия и несущей способности можно выразить обратно через k_o и k_n и тогда выражение (61.4) примет вид:

$$\bar{K} = \frac{1 + \sqrt{1 - k_o k_n (2 - k_o)(2 - k_n)}}{[k_o(2 - k_o)]} \quad (4.29)$$

Лекция 5. Сочетания постоянных нагрузок. Корреляционно не связанные нагрузки. Изменчивость полной нагрузки. Коэффициент перегрузки для полной нагрузки. Сочетания прочностных свойств. Метод статистической линеаризации

Расчетные значения нагрузок при наличии статистических данных допускается определять непосредственно по заданной вероятности их превышения.

Сочетания нагрузок по действующим нормам

СНиП 2.01.07-85* "Нагрузки и воздействия"

Расчет конструкций и оснований по предельным состояниям первой и второй групп следует выполнять с учетом неблагоприятных сочетаний нагрузок или соответствующих им усилий. Эти сочетания устанавливаются из анализа реальных вариантов одновременного действия различных нагрузок для рассматриваемой стадии работы конструкции или основания.

В зависимости от учитываемого состава нагрузок следует различать:

- а) **основные сочетания нагрузок**, состоящие из постоянных, длительных и кратковременных,
- б) **особые сочетания нагрузок**, состоящие из постоянных, длительных, кратковременных и одной из особых нагрузок.

Временные нагрузки с двумя нормативными значениями следует включать в сочетания как длительные — при учете пониженного нормативного значения, как кратковременные — при учете полного нормативного значения.

При учете сочетаний, включающих постоянные и не менее двух временных нагрузок, расчетные значения временных нагрузок или соответствующих им усилий умножаются на коэффициенты сочетаний, равные:

в основных сочетаниях для длительных нагрузок $\psi_1 = 0,95$; для кратковременных $\psi_2 = 0,9$:

в особых сочетаниях для длительных нагрузок $\psi_1 = 0,95$; для кратковременных $\psi_2 = 0,8$, кроме случаев, оговоренных в нормах проектирования сооружений для сейсмических районов и в других нормах проектирования конструкций и оснований. При этом особую нагрузку следует принимать без снижения.

При учете основных сочетаний, включающих постоянные нагрузки и одну временную нагрузку (длительную или кратковременную), коэффициенты ψ_1 , ψ_2 вводить не следует.

В основных сочетаниях при учете трех и более кратковременных нагрузок их расчетные значения допускается умножать на коэффициент сочетания ψ_2 , принимаемый для первой (по степени влияния) кратковременной нагрузки — 1,0, для второй — 0,8, для остальных — 0,6.

При учете сочетаний, включающих несколько временных нагрузок, за одну временную нагрузку следует принимать:

а) нагрузку определенного рода от одного источника (давление или разрежение в емкости, снеговую, ветровую, гололедную нагрузки, температурные климатические воздействия, нагрузку от одного погрузчика, электрокара, мостового или подвесного крана);

б) нагрузку от нескольких источников, если их совместное действие учтено в нормативном и расчетном значениях нагрузки (нагрузку от оборудования, людей и складироваемых материалов на одно или несколько перекрытий с учетом коэффициентов ψ_A и ψ_n , приведенных в пп. 3.8 и 3.9; нагрузку от нескольких мостовых или подвесных кранов с учетом коэффициента ψ , приведенного в п. 4.17; гололедно-ветровую нагрузку, определяемую в соответствии с п. 7.4).

Метод расчета норм имеет вид детерминированного, но значения коэффициентов сочетаний в нем установлены из рассмотрения нагрузок как случайных величин. Их экстремальные значения, встречающиеся редко, в сочетаниях нагрузок или усилий от них могут совпасть по времени чрезвычайно редко. Вероятность такого события определяется как произведение вероятностей появления расчетных значений каждой нагрузки. Например, для снеговой и ветровой нагрузок, имеющих обеспеченности расчетных значений 1/25 и 1/50 соответственно, вероятность совпадения в каком-либо году равна 1/1250, что слишком мало для зданий, срок службы которых на порядок меньше. Поэтому временные нагрузки сочетают со снижением их суммарного эффекта.

Коэффициент $\psi_2 = 0,9$ для кратковременных нагрузок в широком диапазоне соотношений их численных значений обеспечивает избыточный запас прочности. Так, для трех временных нагрузок – снеговой, ветровой и крановой – при их примерно одинаковом долевым вкладе значение коэффициента сочетаний ψ_2 должно быть близким к 0,7. При этом вероятность превышения расчетных усилий будет примерно одинаковой как для суммы нагрузок, так и для каждой из них.

Вместе с тем, для постоянных нагрузок, состоящих, как правило, из нескольких отдельных разного характера составляющих (например, слои в

совмещенном покрытии), коэффициент сочетания не вводится в запас надежности.

Согласно нормативным документам (СНиП 2.01.07-85. Общие положения):

1.10. Расчет конструкций и оснований по предельным состояниям первой и второй групп следует выполнять с учетом неблагоприятных сочетаний нагрузок или соответствующих им усилий.

1.11. Эти сочетания устанавливаются из анализа реальных вариантов одновременного действия различных нагрузок для рассматриваемой стадии работы конструкции или основания.

1.12. В зависимости от учитываемого состава нагрузок следует различать:

- основные сочетания нагрузок, состоящие из постоянных, длительных и кратковременных;
- особые сочетания нагрузок, состоящие из постоянных, длительных, кратковременных и одной из особых нагрузок.

Временные нагрузки с двумя нормативными значениями следует включать в сочетания как длительные – при учете пониженного нормативного значения, как кратковременные – при учете полного нормативного значения.

Сочетания нагрузок как случайных величин

Если полная нагрузка включает n отдельных случайных, корреляционно не связанных нагрузок, то центр распределения и дисперсия ее равны сумме этих характеристик составляющих нагрузок:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i - \text{для центров распределения,} \quad (5.1)$$

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^n \hat{Q}_i - \text{для дисперсий.} \quad (5.2)$$

Если отдельные нагрузки корреляционно связаны, то добавляется удвоенная смешанная дисперсия (произведение дисперсий корреляционно связанных нагрузок).

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^n \hat{Q}_i + 2 \sum_{i,j=1}^n (\rho_{ij} \hat{Q}_i \hat{Q}_j) - \text{для дисперсий.} \quad (5.3)$$

Коэффициент вариации (изменчивости) с.в. (полная нагрузка) тогда можно записать так:

$$V_Q = \sqrt{\hat{Q} / \bar{Q}^2} \quad \text{или} \quad (5.4)$$

$$V_Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 V_{Q_i}^2}, \quad (5.5)$$

где $\alpha_i = \bar{Q}_i / \bar{Q}$ – доля i -й нагрузки в общем нагружении, а $V_{Q_i} = \sqrt{\hat{Q} / \bar{Q}_i^2}$ – вариация (изменчивость) i -й нагрузки.

Общий коэффициент перегрузки для одинаковой обеспеченности (или β) с составляющими нагрузками с учетом (5.5) будет **по А.Р. Ржаницыну**:

$$k_n = 1 + \beta V(Q) = 1 + \beta \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 [(k_{ni} - 1) / \beta]^2} = 1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (k_{ni} - 1)^2}$$

и коэффициент запаса по нагрузке будет: $k_n - 1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (k_{ni} - 1)^2}$, так как при $K=1$ м.о. R и Q равны.

Сочетания прочностных свойств. Метод статистической линеаризации

При оценке несущей способности сооружений и отдельных их частей часто приходится иметь дело с многокомпонентными сложными сочетаниями материалов, совместная прочность которых не просто суммируется, а является сложной нелинейной функцией их прочностных свойств. Например, прочность сечения железобетонной балки, определяемая в СНиПе предельным моментом, воспринимаемым сечением:

$$M = R_a f_a [h_0 - R_a f_a / (2bR_{np})], \quad (5.6)$$

где M – нелинейная функция случайных аргументов в балках и плитах: R_a – предел прочности арматуры, R_{np} – призмная прочность бетона, h_0 – глубина закладки арматуры от поверхности (в балках и плитах можно считать случайной по технологическим причинам); f_a – площадь сечения арматуры; b – ширина балки.

Сущность *метода статистической линеаризации* заключается в том, что производится замена нелинейно связанных случайных функций статистически эквивалентной линейной зависимостью. Чаще всего для практических целей статистическая эквивалентность понимается для таких с.в., которые имеют одинаковые характеристики при том же законе распределения аргумента [3]. Обычно считают, что распределение подчиняется нормальному закону. Иногда к этому имеются определенные основания, но чаще их нет, однако условно принимают закон нормальным и производят приближенный расчет [4].

Приближенно нелинейную случайную величину \tilde{M} можно представить, отбросив нелинейные члены разложения в ряд Тейлора. В окрестности центра распределения такое допущение достаточно обоснованно даже при больших отклонениях случайных аргументов: R_a , R_{np} и h_0 .

$$\tilde{M} = M(\tilde{R}_a, \tilde{R}_{np}, \tilde{h}_0) \approx M_0 + A(\tilde{R}_a - \bar{R}_a) + B(\tilde{R}_{np} - \bar{R}_{np}) + C(\tilde{h}_0 - \bar{h}_0), \quad (5.7)$$

где A , B и C частные производные выражения M по R_a , R_{np} и h_0 – соответственно, в центрах распределения случайных аргументов:

$$A = f_a \bar{h}_0 - \bar{R}_a f_a^2 / (b \bar{R}_{np}), \quad B = \bar{R}_a^2 f_a^2 / (2b \bar{R}_{np}^2), \quad C = \bar{R}_a f_a,$$

$$\text{а } M_0 = \bar{R}_a f_a [\bar{h}_0 - \bar{R}_a f_a / (2b \bar{R}_{np})]. \quad (5.8)$$

Тогда приближенные характеристики нелинейной функции случайных аргументов:

$$\bar{M} \approx M_0 - \text{математическое ожидание (центр распределения);}$$

$$\hat{M} \approx A^2 \hat{R}_a + B^2 \hat{R}_{np} + C^2 \hat{h}_0 - \text{дисперсия;}$$

$$V_M = \sqrt{\hat{M}} / M_0 - \text{изменчивость.} \quad (5.9)$$

Лекция 6. Нагрузки. Повторные нагружения. Определение расчетной нагрузки при многократном действии. Определение коэффициента запаса

ХАРАКТЕРИСТИКИ НАГРУЗОК И ВОЗДЕЙСТВИЙ

Классификация нагрузок

Нагрузки и воздействия представляют собой наиболее неопределенные величины, обладающие большим статистическим разбросом.

В части математического описания нагрузки делятся на:

- нагрузки, представляющие собой случайные величины;
- нагрузки, представляющие собой случайные функции времени;
- нагрузки, изменяющиеся не только во времени, но и в пространстве по случайным или детерминированным законам.

По продолжительности действия и частоте появления действующий СНиП 2.01.07-85* разделяет нагрузки на постоянные и временные (длительные, кратковременные, особые).

К **постоянным** нагрузкам относятся:

а) вес частей сооружений, в том числе вес несущих и ограждающих строительных конструкций;

б) вес и давление грунтов (насыпей, засыпок), горное давление.

Сохраняющиеся в конструкции или основании усилия от предварительного напряжения следует учитывать в расчетах как усилия от постоянных нагрузок.

К **длительным** нагрузкам относятся:

а) вес временных перегородок, подливок и подбетонки под оборудование;

б) вес стационарного оборудования: станков, аппаратов, моторов, емкостей, трубопроводов с арматурой, опорными частями и изоляцией, ленточных конвейеров, постоянных подъемных машин с их канатами и

направляющими, а также вес жидкостей и твердых тел, заполняющих оборудование;

в) давление газов, жидкостей и сыпучих тел в емкостях и трубопроводах, избыточное давление и разрежение воздуха, возникающее при вентиляции шахт;

г) нагрузки на перекрытия от складироваемых материалов и стеллажного оборудования в складских помещениях, холодильниках, зернохранилищах, книгохранилищах, архивах и подобных помещениях;

д) температурные технологические воздействия от стационарного оборудования;

е) вес слоя воды на водонаполненных плоских покрытиях;

ж) вес отложений производственной пыли, если ее накопление не исключено соответствующими мероприятиями;

з) нагрузки от людей, животных, оборудования на перекрытия жилых, общественных и сельскохозяйственных зданий с пониженными нормативными значениями, приведенными в табл. 3 СНиПа;

и) вертикальные нагрузки от мостовых и подвесных кранов с пониженным нормативным значением, определяемым умножением полного нормативного значения вертикальной нагрузки от одного крана в каждом пролете здания на коэффициент:

0,5 – для групп режимов работы кранов 4К–6К;

0,6 – для группы режима работы кранов 7К;

0,7 – для группы режима работы кранов 8К.

Группы режимов работы кранов принимаются по ГОСТ 25546-82;

к) снеговые нагрузки с пониженным расчетным значением, определяемым умножением полного расчетного значения на коэффициент 0,5.

л) температурные климатические воздействия с пониженными нормативными значениями, определяемыми в соответствии с указаниями пп. 8.2–8.6 СНиПа;

м) воздействия, обусловленные деформациями основания, не сопровождающимися коренным изменением структуры грунта, а также оттаиванием вечномерзлых грунтов;

н) воздействия, обусловленные изменением влажности, усадкой и ползучестью материалов.

К кратковременным нагрузкам следует относить:

а) нагрузки от оборудования, возникающие в пускоостановочном, переходном и испытательном режимах, а также при его перестановке или замене;

б) вес людей, ремонтных материалов в зонах обслуживания и ремонта оборудования;

в) нагрузки от людей, животных, оборудования на перекрытия жилых, общественных и сельскохозяйственных зданий с полными нормативными значениями;

г) нагрузки от подвижного подъемно-транспортного оборудования (погрузчиков, электрокаров, кранов-штабелеров, тельферов, а также от мостовых и подвесных кранов с полным нормативным значением);

д) снеговые нагрузки с полным расчетным значением;

е) температурные климатические воздействия с полным нормативным значением;

ж) ветровые нагрузки;

з) гололедные нагрузки.

К **особым нагрузкам** следует относить:

а) сейсмические воздействия;

б) взрывные воздействия;

в) нагрузки, вызываемые резкими нарушениями технологического процесса, временной неисправностью или поломкой оборудования;

г) воздействия, обусловленные деформациями основания, сопровождающимися коренным изменением структуры грунта (при замачивании просадочных грунтов) или оседанием его в районах горных выработок и в карстовых.

Повторные нагружения

Если некоторая нагрузка многократно повторяется, то при каждом следующем повторении вероятность того, что нагрузка дважды окажется меньше некоторого случайного значения x равна $P_q^2(x)$, где $P_q(x)$ — вероятность для нагрузки быть меньше x в каждом случае нагружения. Вероятность же превышения x хотя бы один раз будет $1 - P_q^2(x)$.

Для n -кратного повторения интегральная кривая распределения $P_q(x)$, соответственно, возводится в n -ую степень $P_q^n(x)$, а плотность распределения вероятности будет производной от этой степенной функции

$$p_{qn} = \frac{d}{dx} P_q^n(x) = n P_q^{n-1}(x) p_q, \quad (6.1)$$

где p_q — кривая распределения однократной случайной нагрузки.

Таким образом, для заданного уровня вероятности непревышения определенной величины q_1 , являющейся квантилем при однократном приложении нагрузки, квантиль q_n будет увеличиваться путем переноса точки интегральной кривой распределения однократной нагрузки вправо на величину $\beta \ln n$. Здесь β — характеристика безопасности (показывает число стандартов $\sigma(S)$, укладываемых в интервале от S до $S = \bar{S}$) (4.8, 4.9).

Принимая интегральную кривую распределения вероятности в виде двойного экспоненциального закона Гумбеля:

$$P_q = \exp \left[- \exp \left(\frac{a - q}{\beta} \right) \right], \quad (6.2)$$

для n -кратного повторения интегральная кривая распределения $P_q^n(x)$ может быть получена в виде:

$$P_q^n = \exp \left[-n \exp \left(\frac{a-q}{\beta} \right) \right] = \exp \left[-\exp \left(\ln n + \frac{a-q}{\beta} \right) \right] = \exp \left[-\exp \left(\frac{a-q + \beta \ln n}{\beta} \right) \right]. \quad (6.3)$$

При этом очевидно, что стандарт $\sigma(q) = \sqrt{D(q)}$ не изменяется и для сохранения той же обеспеченности вероятности следует расчетное значение нагрузки увеличить на $\beta \ln n$.

Из решения (6.2) расчетное значение нагрузки при однократном ее действии, обеспечивающее заданную P_q , будет:

$$q = a - \beta \ln(-\ln P_q) = q_1 \quad (6.4)$$

и является квантилью двойного экспоненциального закона распределения Гумбеля.

Для n -кратного повторения нагрузки ее расчетное значение из (6.3) будет:

$$q_n = a - \beta \ln(-\ln P_q) + \beta \ln n = a - \beta \ln [(-\ln P_q)/n]. \quad (6.5)$$

Определение коэффициента запаса

$S = R - F$ – резерв прочности,

где F – наибольшее значение усилия (или напряжения) в конструкции, выраженное через внешнюю нагрузку q . Например, изгибающий момент в опасном сечении $F = ql^2/8$ для свободно опертой однопролетной балки (т.е. задача определения напряженного состояния предполагается решенной); R – несущая способность, выраженная в тех же единицах, и отвечающая предельному состоянию конструкции по прочности (изгибающий момент, соответствующий появлению пластического шарнира в этом же сечении и соответствующий заданным геометрическим и жесткостным параметрам решаемой задачи).

Иногда вместо резерва прочности вводят случайный коэффициент запаса (4.15)

$$K = R/F,$$

здесь K, R, F – случайные величины.

Тогда вероятность разрушения

$$Q = Q(K < 1) = P_K(1),$$

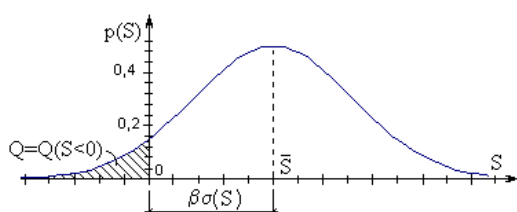
где $P_K(1)$ – функция распределения коэффициента запаса при аргументе $K=1$.

Вероятность неразрушения

$$P = P(K > 1).$$

М.о. коэффициента запаса (коэффициент детерминированный)

$$\bar{K} = \bar{R} / \bar{F}.$$



Для удобства вводят характеристику безопасности (при независимых R и F):

$$\beta = \frac{\bar{S}}{\sigma(S)} = \frac{\bar{R} - \bar{F}}{\sqrt{\sigma^2(R) + \sigma^2(F)}}. \quad (6.6)$$

Тогда, разделив числитель и знаменатель правой части (4.9) на \bar{F} и используя (4.18), получим характеристику безопасности

$$\beta = \frac{\bar{K} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma^2(F)}{\bar{F}^2} + \frac{\sigma^2(R)}{\bar{F}^2}}} = \frac{\bar{K} - 1}{\sqrt{V^2(F) + \bar{K}^2 V^2(R)}}, \quad (6.7)$$

где $V(F) = \sigma(F)/\bar{F}$, $V(R) = \sigma(R)/\bar{R}$ – коэффициенты вариации усилия и несущей способности.

Откуда можно вывести приближенную формулу, связывающую характеристику безопасности β и математическое ожидание коэффициента запаса

$$\bar{K} \approx 1 + \beta \sqrt{V^2(R) + V^2(F)}. \quad (6.8)$$

Лекция 7. Нагрузки. Нагрузки как случайные величины. Снеговые нагрузки

Снеговая нагрузка на покрытия определяется весом снегового покрова на единицу площади. Основные факторы, влияющие на значение снеговой нагрузки – это количество выпадающих в зимнее время осадков, ветровой перенос (в том числе сдувание с покрытия) и таяние снега. Разница в количестве осадков в разные годы служит причиной многолетней изменчивости снеговой нагрузки.

Базовое значение снеговой нагрузки представляет собой **РАСЧЕТНЫЙ ВЕС СНЕГОВОГО ПОКРОВА** на 1 м^2 горизонтальной поверхности земли, превышаемый один раз в 25 лет (точнее, зим). В нормах он обозначен S_g и приведен ниже в таблице для восьми снеговых районов, на которые разделена территория страны.

ИЗМЕНЕНИЯ РАСЧЕТНОЙ СНЕГОВОЙ НАГРУЗКИ

в СНиП 2.01.07-85* (Изменение № 2 от 2003 г.)

Снеговые районы РФ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
S_g (Изменение № 2)	0,8	1,2	1,8	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6
$S_{(10)}$ (старая)	0,7	0,98	1,4	2,1	2,8	3,5	-	-

редакция)								
$S_{(25)} = 1,6 S_{(10)}$	0,8	1,12	1,6	2,4	3,2	4,0	-	-
$S_g / S_{(10)}$	1,142	1,224	1,286	1,143	1,143	1,143	-	-
$S_g / S_{(25)}$	1	1,071	1,125	1	1	1	-	-

ХАРАКТЕРИСТИКИ СНЕГОВЫХ РАЙОНОВ ДЛЯ НОВОЙ КАРТЫ РАЙОНИРОВАНИЯ ТЕРРИТОРИИ РОССИИ ПО СНиП 2.01.07-85* (с осени 2003 г.)

№ снеговог о района	Нормати вное значени е S_o , кгс/м ²	Интервал значений S_o , кгс/м ²	Расчетно е значение $1,6 S_o$, кгс/м ²	Рекоменду емое значение расчетной нагрузки с обеспечен ностью 0,96 кгс/м ²	Отступле ния от истинных значений для района, кгс/м ²	Интервал истинных значений ВСП с обеспече нностью 0,96, кгс/м ²
I	50	до 59	80	80	+5	до 85
II	70	60-79	112	120	-34 +20	86-140
III	100	80-117	160	180	-39 +20	141-200
IV	150	118-167	240	240	-54 +25	201-265
V	200	168-217	320	320	-54 +25	266-345
VI	250	218-267	400	400	-54 +25	346-425

Для горных районов с высотой над уровнем моря более 1500 м и малоизученных и в местах со сложным рельефом значение веса снегового покрова следует определять по данным метеорологической службы. При этом за S_g принимается среднее значение ежегодных максимумов запаса воды по результатам снегосъемок за период не менее 20 лет.

Максимальный вес снегового покрова для заданной местности за несколько лет представляет собой стационарную случайную последовательность. Следовательно, сооружения за все время их эксплуатации многократно подвергаются загрузке одной и той же случайной нагрузкой в виде веса снега. Расчетным значением этой нагрузки должен быть максимум из n ее повторений, где n — число лет службы сооружения.

Кривая распределения максимальной годовой снеговой нагрузки определяется статистической обработкой последовательности снеговых нагрузок за большое число лет.

В ряде случаев, например, при расчете конструкций покрытий с применением пластмасс и для мягких оболочек, представляет интерес не только максимальная за год снеговая нагрузка, а и значения ее в любой день зимнего периода.

В определенных ситуациях разрушение конструкций под действием снеговой нагрузки может произойти не в конце зимы, а сразу после обильного снегопада. А.Р. Ржаницын выделяет несколько причин этого:

- свежавыпавший снег рыхлый и не имеет собственной жесткости типа плиты или оболочки, как слежавшийся;
- при обильном снегопаде более вероятно образование "снеговых мешков" и заносов, так как весь снег выпадает при одном направлении ветра;
- на покрытиях горячих цехов снег долго не лежит из-за положительной температуры поверхности кровли, а при сильном снегопаде он может не успеть быстро растаять;
- на обычных утепленных кровлях снеговые заносы после обильных снегопадов часто расчищают или снег слеживается и приобретает некоторую собственную жесткость, что является благоприятным фактором для конструкций.

Для расчета на действие свежавыпавшего снега требуются данные о распределении вероятности суточных снеговых осадков. При этом каких-либо нормативов для подобных расчетов до настоящего времени нет.

Принципиально такая задача разрешима, однако, при этом требуется выполнить огромный объем статистической обработки данных метеонаблюдений. В настоящее время учитываются лишь основные факторы и используются упрощенные методы расчета. Поэтому для специалистов очевидна необходимость создания **ТЕОРИИ НАГРУЗОК**, включающей классификацию свойств и конкретный анализ загрузений разных видов.

Для расчета сооружений на длительные сроки требуется знать значение максимальной снеговой нагрузки за много лет. Поскольку корреляция между годовыми нагрузками практически отсутствует, многолетнюю снеговую нагрузку можно получить теоретически, зная функцию распределения максимальной годовой нагрузки.

Обычно для описания максимальной годовой снеговой нагрузки используют законы распределения Гумбеля

$$P(q_{cl}) = \exp\left(-\exp\frac{\alpha - q_{cl}}{\beta}\right), \quad (7.1)$$

хотя этот закон допускает вероятность отрицательных значений q_{cl} .

Коэффициенты α и β имеют различные значения для разных местностей. Например, для Москвы $\alpha = 931 \text{ Н/м}^2$, $\beta = 365 \text{ Н/м}^2$.

Для определения максимально допустимой снеговой нагрузки на сооружение, рассчитанное на n лет, вероятность непревышения его значения q_{cn} :

$$P(q_{cn}) = P^n(q_{cl}). \quad (7.2)$$

Или вероятность превышения величины q_{cn} за n лет

$$Q = 1 - P^n(q_{cl}); \quad (7.3)$$

$$P(q_{cl}) = \sqrt[n]{1 - Q}. \quad (7.4)$$

С помощью (7.4) величину q_{cl} , соответствующую заданному числу лет n и допустимой вероятности Q легко определить графически по кривой интегрального закона распределения $P(q_{cn})$.

Подставляя (7.2) в (7.1) получим

$$P(q_{cn}) = \exp\left(-n \cdot \exp\frac{\alpha - q_{cl}}{\beta}\right) = \exp\left[-\exp\left(\frac{\alpha - q_{cl}}{\beta} + \ln n\right)\right] = \exp\left(-\exp\frac{\alpha_n - q_{cl}}{\beta}\right), \quad (7.5)$$

где $\alpha_n = \alpha + \beta \ln n$.

Таким образом, переход от максимума за год к максимуму за n лет (при распределении Гумбеля) приводит к поступательному смещению кривой $P(q_{cl})$ вдоль OX вправо на величину $\beta \ln n$. Также смещается и $p(q_{cl})$.

Тогда можно записать

$$\bar{q}_{cn} = \bar{q}_{cl} + \beta \ln n, \quad (7.6)$$

но дисперсия при этом не изменяется $D(q_{cn}) = D(q_{cl})$.

Построение вероятностных моделей распределения годовых максимумов ВСП

Для построения вероятностных моделей распределения годовых максимумов ВСП необходимо вычислить параметры соответствующих законов. Для логнормального распределения это - x и $\sigma(x)$, для распределения Вейбулла - β и θ , для распределения Гумбеля - α и β .

Параметры распределений Вейбулла и Гумбеля находятся путём аппроксимации эмпирической зависимости соответствующим уравнением. Расчёт производился с использованием программного продукта Easy Plot 2.01 разработки Стюарта Кэрона (*Stuart Karon*). Данная программа приближает теоретическую функцию к эмпирической путём изменения соответствующих параметров закона распределения и минимизации суммы квадратов отклонений значений теоретической функции от эмпирической.

Программа представляет результаты расчёта в виде графика эмпирической и теоретической функций и аннотации, включающей вид используемого аппроксимационной зависимости и ее параметры.

В ряде случаев при построении кривой интегрального логарифмически нормального закона по параметрам, рассчитанным классическим способом, наблюдается существенное отклонение данной кривой от поля рассеяния значений эмпирической функции распределения, что приводит к ошибочным прогнозам нагрузки на больших периодах её однократного превышения (30 и более лет).

Выявление этого факта, а также то, что логарифмически нормальный закон распределения случайной величины содержит в себе интеграл, который не выражается через элементарные функции, привело к необходимости разложения данного закона в степенной ряд Тейлора. При этом интегральный закон записывается в виде:

$$P(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3 \cdot 2} + \frac{z^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1) \cdot 2^n \cdot n!} \right), \quad (7.7)$$

где
$$z = \frac{\ln y - s}{\sigma^2(s)}. \quad (7.8)$$

В этом случае параметры распределения вычисляются путём аппроксимации эмпирической зависимости уравнением (7.7), как описано выше.

Результаты расчётов параметров законов распределения ежегодных максимумов снеговой нагрузки приведены ниже.

Если рассматривать **снеговую нагрузку как случайный стационарный процесс**, то его можно задать следующим образом.

Для г. Волгограда – аппроксимация функции м.о. высоты снегового покрова:

$$\bar{h}(t) = h_0 + A_0 \cos(2\pi \cdot t / T), \quad (7.9)$$

где $h_0 = 4,3$ см – среднее значение; $A_0 = 4,2$ см – амплитуда; $T = 180$ дней – период математического ожидания.

Корреляционная функция случайного процесса $h(\tau)$ аппроксимируется функцией

$$K_h(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|}, \quad (7.10)$$

где $D = D(h) = 55,67$ см² – дисперсия высоты снегового покрова; $\alpha = 0,04$ день⁻¹ – параметр функции.

Статистическая оценка полученных вероятностных моделей распределения годовых максимумов снеговой нагрузки

Статистическая оценка полученных вероятностных моделей может проводиться при помощи распределения χ^2 (хи-квадрат), связанного с критерием χ^2 . Критерий χ^2 используется для сравнения эмпирических значений и значений, получаемых из той или иной вероятностной модели распределения непрерывной случайной величины.

С этой целью ряд эмпирических значений разбивается на 8 ... 12 интервалов (бинов). Размер (ширина) бинов обычно выбирается таким, чтобы в каждый из них попадало не менее четырех опытных значений. Для каждого интервала устанавливается частота попадания в него значения аргумента эмпирической функции распределения непрерывной случайной величины. После этого вычисляется частота попадания в заданный интервал значений аргумента закона распределения, используемого для построения математической модели, как произведение числа членов эмпирического ряда на разность вероятностей, получаемых из закона распределения для правой и левой границ интервала.

Значение критерия χ^2 вычисляется следующим образом. Вероятность попадания значения x в интервал $(x_{i-1}; x_i)$ равна $P(x) = P(x_i) - P(x_{i-1})$.

Критерий χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}, \quad (7.11)$$

где m_i - число попаданий значений случайной величины x в i -й интервал;

k - число интервалов;

n - число наблюдений.

Односторонняя вероятность распределения χ^2 табулирована и вычисляется как функция критерия χ^2 и числа степеней свободы.

Для всех применяемых в работе законов распределения случайной величины число степеней свободы равно 5.

Исходная гипотеза считается обоснованной и подтверждаемой экспериментом, если значение односторонней вероятности распределения χ^2 превышает некоторый уровень значимости. Для подавляющего большинства технических расчётов уровень значимости принимается равным 5 % (0,05).

Все вычисления, связанные с проверкой применимости законов распределения на основании критерия χ^2 , можно производить в табличном редакторе EXCEL. Результаты расчёта значений односторонней вероятности распределения годовых максимумов веса снегового покрова для метеостанций Краснодарского края обрабатывались для оценки применимости различных законов распределения.

Аналогично определяются параметры распределения годовых максимумов скоростей ветра.

Статистическая оценка полученных вероятностных моделей распределения годовых максимумов веса снегового покрова и скорости ветра показывает, что для большей части территории Краснодарского края для описания ежегодных максимумов ВСП наилучшим является логарифмически нормальный закон, а для описания ежегодных максимумов скорости ветра - распределение Гумбеля. Однако для ряда метеостанций эти законы совершенно неприемлемы. Так, для описания ежегодных максимумов снеговой нагрузки в горных районах более подходящим является распределение Вейбулла, а в прибрежных - распределение Гумбеля.

Лекция 8. Ветровые нагрузки и нагрузки, изменяющиеся непрерывно во времени по случайному закону. Корреляционные функции. Стационарные случайные функции

Случайная функция – функция, которая в результате опыта может принять тот или иной неизвестный заранее конкретный вид. Обычно аргументом случайной функции (с.ф.) является время, тогда с.ф. называют *случайным процессом* (с.п.).

С.ф. непрерывно изменяющегося аргумента t называется такая с.в., распределение которой зависит не только от аргумента $t=t_1$, но и от того, какие частные значения принимала эта величина при других значениях данного аргумента $t=t_2$. Эти с.в. корреляционно связаны между собой и тем больше, чем ближе одни к другим значения аргументов. В пределе при интервале между двумя значениями аргумента, стремящемся к нулю, коэффициент корреляции равен единице:

$$r(X_1, X_2) = \frac{k(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)} = 1, \quad (8.1)$$

т.е. t_1 и $t_1 + \Delta t_1$ при $\Delta t_1 \rightarrow 0$ связаны линейной зависимостью.

С.ф. принимает в результате одного опыта бесчисленное (в общем случае несчетное) множество значений – по одному для каждого значения аргумента или для каждой совокупности значений аргументов. Эта функция имеет одно вполне определенное значение для каждого момента времени. Результат измерения непрерывно изменяющейся величины является такой с.в., которая в каждом данном опыте представляет собой определенную функцию времени.

С.ф. можно также рассматривать как бесконечную совокупность с.в., зависящую от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров t . Каждому данному значению параметра t соответствует одна с.в. X_t . Вместе все с.в. X_t определяют с.ф. $X(t)$. Эти с.в. корреляционно связаны между собой и тем сильнее, чем ближе друг к другу.

Элементарная с.ф. – это произведение обычной с.в. X на некоторую неслучайную функцию $\varphi(t)$: $X(t)=X \cdot \varphi(t)$, т.е. такая с.ф., у которой случайным является не вид, а только ее масштаб.

С.ф. $Y(t) = X(t) - \bar{X}(t)$ – имеет м.о. равное нулю. $p[x(t_1)]$ – плотность распределения с.в. X (значения с.ф. $X(t)$), взятой при произвольном значении t_1 аргумента t .

Реализация с.ф. $X(t)$ – описывается уравнением $x=f_1(t)$ при $t=t_1$ и уравнением $x=f_2(t)$ при $t=t_2$.

Вообще функции $x=f_1(t)$ и $x=f_2(t)$ – различные функции. Но эти функции тождественны и линейны тем более, чем более t_1 ближе к t_2 ($t_1 \rightarrow t_2$).

Одномерная плотность вероятности с.ф. $p(x, t)$ – зависит от x и от параметра t . Двумерная плотность вероятности $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ – совместный закон распределения значений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ с. ф. $X(t)$ при двух произвольных значениях t и t' аргумента t .

$$p(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2 \quad p(x_1(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1(t_1), x_2(t_2)) dx_2 \cdot \quad (8.2)$$

В общем случае функция $X(t)$ характеризуется большим числом n -мерных законов распределения $p(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$.

М.о. с.ф. $X(t)$ – неслучайная функция $\bar{X}(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна м.о. ординаты с.ф. при этом аргументе t .

$\bar{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) p[x(t_1)] dx(t_1)$, $p[x(t_1)]$ – функция, зависящая от x и t .

Аналогично и дисперсия – неслучайная функция.

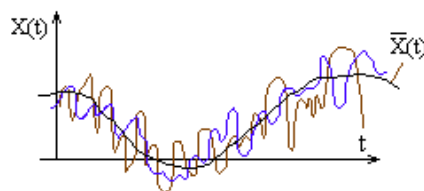
Степень зависимости с.в. для различных значений аргумента характеризуется автокорреляционной функцией.

Автокорреляционная функция с.ф. $X(t)$ – неслучайная функция двух аргументов $K_x(t_i, t_j)$, которая при каждой паре значений t_i, t_j равна корреляционному моменту соответствующих ординат с.ф. (при $i=j$ корреляционная функция (к.ф.) обращается в дисперсию с.ф.);

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - \bar{X}(t_1)] \cdot [x(t_2) - \bar{X}(t_2)] p[x(t_1), x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2) \quad (8.3),$$

где $p[x(t_1), x(t_2)]$ – совместная плотность распределения двух с.в. (значений с.ф.), взятых при двух произвольных значениях t_1 и t_2 аргумента t . При $t_1=t_2=t$ получаем дисперсию $D(t)$.

Автокорреляционная функция – совокупность м.о. произведений отклонений двух ординат с.ф. $X(t)$, взятых при аргументах t_1 и t_2 , от ординат неслучайной функции м.о. $\bar{X}(t)$, взятых при тех же аргументах.



Автокорреляционная функция характеризует степень изменчивости с.ф. при изменении аргумента. На рис. ниже видно, что зависимость между значениями с.ф., соответствующим двум данным значениям аргумента t – слабее в первом случае.

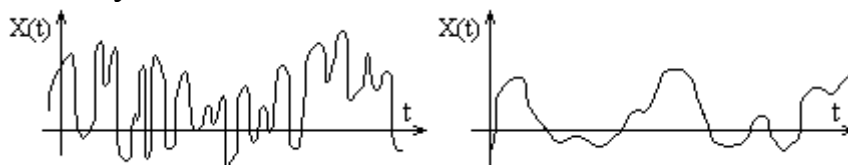


Рис. Корреляционно связанные случайные функции

Если две с.ф. $X(t)$ и $Y(t)$, образующие систему, не являются независимыми, то тождественно не равна нулю их взаимная корреляционная функция:

$$K_{yx}(t_2, t_1) = K_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - \bar{X}(t_1)] \cdot [y(t_2) - \bar{Y}(t_2)] \cdot p[x(t_1), y(t_2)] dx(t_1) dy(t_2), \quad (8.4)$$

где $p[x(t_1), y(t_2)]$ – совместная плотность распределения двух с.в. (значений двух с.ф. $X(t)$ и $Y(t)$), взятых при двух произвольных аргументах (t_1 – аргумент функции $X(t)$, t_2 – аргумент функции $Y(t)$).

Если $X(t)$ и $Y(t)$ независимы, то $K_{XY}(t_1, t_2) = 0$. Система из n с.ф. $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ характеризуется n м.о. $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$, n автокорреляционными функциями $K_{X_1}(t_1, t_2), K_{X_2}(t_1, t_2), \dots, K_{X_n}(t_1, t_2)$ и еще $n(n-1)/2$ корреляционными функциями $K_{X_1 X_2}(t_1, t_2), \dots, K_{X_{n-1} X_n}(t_1, t_2)$.

Взаимная корреляционная функция (характеризует связь между двумя с.ф., т.е. стохастическую зависимость) $K_{XY}(t_i, t_j)$ двух с.ф. $X(t)$ и $Y(t)$ – неслучайная функция двух аргументов t_i и t_j , которая при каждой паре значений t_i, t_j равна корреляционному моменту соответствующих сечений с.ф. Она устанавливает связь между двумя значениями двух функций (значения – с.в. при двух аргументах t_1 и t_2).

Особое значение имеют **стационарные случайные функции**, вероятностные характеристики которых не меняются при любом сдвиге аргумента. М.о. стационарной с.ф. постоянно (т.е. не является функцией), а корреляционная функция зависит лишь от разности значений аргументов t_i и t_j .

$$\bar{X}(t) = \text{const}, \quad K_X(t_i, t_j) = K_X(\tau) = K_X(-\tau), \quad \tau = t_i - t_j \quad (8.5)$$

Это четная функция (симметрична относительно OY).

$$\text{Из (8.5)} \rightarrow K_X(t_i, t_j) = D(t) = \text{const}, \quad K_X(0) \geq |K_X(\tau)|.$$

При большом значении интервала времени $\tau = t_2 - t_1$ отклонение ординаты с.ф. от ее м.о. в момент времени t_2 становится практически независимым от значения этого отклонения в момент времени t_1 . В этом случае функция $K_X(\tau)$, дающая значение корреляционного момента между $X(t_1)$ и $X(t_2)$, при $|\tau| \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Многие стационарные с.ф. обладают эргодическим свойством, которое заключается в том, что при неограниченно возрастающем интервале наблюдения среднее наблюдаемое значение стационарной с.ф. с вероятностью, равной 1, будет неограниченно приближаться к ее м.о. Наблюдение стационарной с.ф. при разных значениях t на достаточно большом интервале в одном опыте равноценно наблюдению ее значений при одном и том же значении t в ряде опытов.

Иногда требуется определить характеристики преобразованных с.ф. по характеристикам исходных с.ф. Так, если

$$Z(t) = \int_0^t x(t) dt; \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (8.6),$$

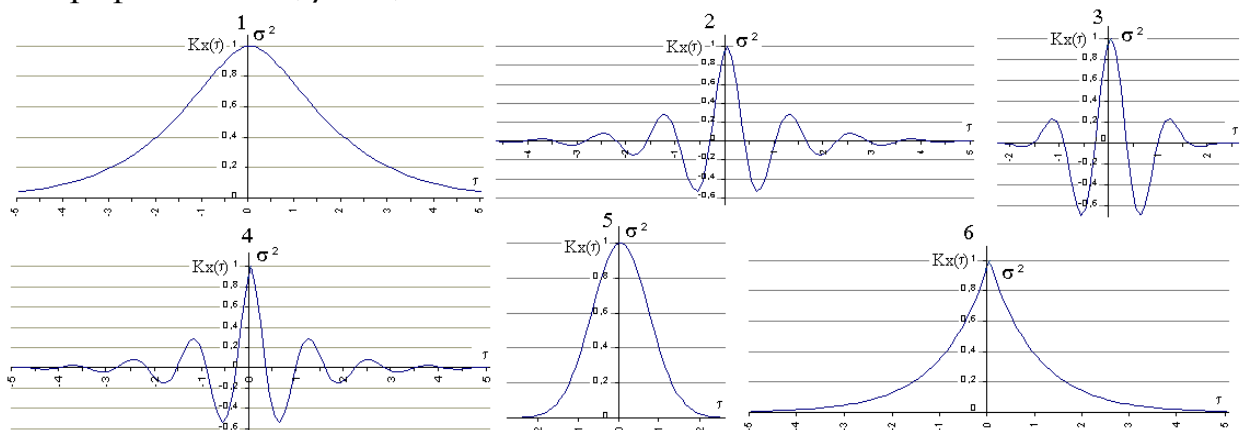
то $\bar{Z}(t) = \int_0^t \bar{X}(t) dt; \quad \bar{Y}(t) = \frac{d\bar{X}(t)}{dt}$ т.е. м.о. интеграла (производной) от с.ф. равно интегралу (производной) от м.о. ($y(t)$ – скорость изменения с.ф. $X(t)$, $\bar{Y}(t)$ – скорость изменения м.о.).

При интегрировании или дифференцировании с.ф. получаем также с.ф. Если $X(t)$ распределена нормально, то $Z(t)$ и $Y(t)$ распределены тоже нормально. Если $X(t)$ – стационарная с.ф., то $Z(t)$ уже не стационарная с.ф., т.к. $D_Z(t) = 2 \int_0^t (t - \tau) K_X(\tau) d\tau$ зависит от t .

Примеры корреляционных функций.

- 1) $K_x(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$ (из (2) при $\beta \rightarrow 0$);
- 2) $K_x(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right)$;
- 3) $K_x(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2} \cos \beta\tau$;
- 4) $K_x(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$;
- 5) $K_x(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}$ (из (3) при $\beta \rightarrow 0$);
- 6) $K_x(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ (из (4) при $\beta \rightarrow 0$).

На графиках $\alpha = 1, \beta = 5, \sigma = 1$.



α - характеризует быстроту убывания корреляционной связи между ординатами с.ф. при увеличении разности аргументов этих ординат τ .

α/β - характеризует "степень нерегулярности процесса". При малом α/β ординаты процесса оказываются сильно коррелированными и реализация процесса похожа на синусоиду; при большом α/β периодичность с частотой β становится незаметной.

Корреляционные функции 4 и 6 – не имеют производных при $\tau=0$. Соответствующие спектральные плотности:

$$\begin{aligned} 2) \quad S(\omega) &= \frac{2\alpha\sigma^2}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}; \\ 3) \quad S(\omega) &= \frac{\sigma^2}{4\alpha\sqrt{\pi}} \left(\exp\left(-\frac{(\omega + \beta)^2}{4\alpha^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega - \beta)^2}{4\alpha^2}\right) \right); \\ 4) \quad S(\omega) &= \frac{\alpha\sigma^2}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}; \\ 6) \quad S(\omega) &= \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Чтобы найти корреляционную функцию интеграла (производной) от с.ф., нужно дважды проинтегрировать (продифференцировать) корреляционную функцию исходной с.ф. сначала по одному, затем по другому аргументу:

$$\begin{cases} K_Z(t_i, t_j) = \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} K_X(t_i, t_j) dt_i dt_j \\ K_Y(t_i, t_j) = \frac{\partial^2 K_X(t_i, t_j)}{\partial t_i \partial t_j} \end{cases} \quad (8.7).$$

Формула (8.7) для стационарной функции примет вид:

$$K_Y(t_i, t_j) = K_Y(\tau) = -\frac{d^2 K_X(\tau)}{d\tau^2}; \quad \tau = t_i - t_j \Rightarrow D_Y(\tau) = -\frac{d^2 K_X(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0}.$$

Корреляционная функция с.ф. и ее производной $K_{XY}(\tau) = -\frac{dK_X(\tau)}{d\tau}$. Для дифференцируемого стационарного процесса ордината с.ф. и ее производной, взятая в тот же момент времени являются некоррелированными с.в. (а для нормального процесса и независимыми).

При умножении с.ф. на детерминированную получаем с.ф. $Z(t)=a(t)X(t)$, корреляционная функция которой равна

$$K_Z(t_1, t_2) = a(t_1)a(t_2) K_X(t_1, t_2) \quad (8.8),$$

где $a(t)$ - детерминированная функция.

Сумма двух с.ф. является тоже с.ф. $Z(t)=X(t)+Y(t)$ и ее корреляционная функция при наличии корреляционной связи между $X(t)$ и $Y(t)$:

$$K_Z(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2) + 2K_{XY}(t_1, t_2), \quad (8.9)$$

где $K_{XY}(t_1, t_2)$ - см. (68.5) - взаимная корреляционная функция двух зависимых с.ф. $X(t)$ и $Y(t)$.

Если $X(t)$ и $Y(t)$ независимы, то $K_{XY}(t_1, t_2)=0$.

М.о. с.ф. $Z(t)$: $\bar{Z}(t) = \bar{X}(t) + \bar{Y}(t)$.

Ветровая нагрузка

Нормативное значение ветрового давления

$$w_0 = \frac{\rho V^2}{2}, \quad (8.10)$$

где ρ – плотность воздуха ($\rho=f(p,t) \approx \text{const}$; p – давление; t – температура); V – скорость ветра.

Скорость ветра представляет собой случайную функцию времени, являющуюся пространственным вектором с координатами $V_x(t)$, $V_y(t)$, $V_z(t)$. Распределение горизонтальных составляющих скорости ветра V_x и V_y определяет розу ветров. Обычно статистическое наблюдение ведут за скоростями ветра. В общем случае переход от статистического распределения скоростей ветра к распределению ветрового давления сложен, но переход может быть осуществлен приближенно.

В качестве функции распределения скоростей ветра w используют распределение Вейбулла

$$P(w) = 1 - \exp(-cw^b), \quad c > 0, \quad b > 0, \quad 0 < w < \infty. \quad (8.11)$$

Постоянные нагрузки

Постоянные нагрузки – постоянные во времени случайные величины. Как правило, постоянные нагрузки обладают небольшой изменчивостью, порядка 0,1 (т.е. $V(x) = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} \approx 0.1$), и могут с достаточной точностью считаться подчиняющимися нормальным законам распределения. Если все нагрузки распределены по одному и тому же закону, то математическое ожидание их суммы равно сумме отдельных м.о.:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \dots + \bar{Q}_n. \quad (8.12)$$

Коэффициент вариации (изменчивости)

$$V(Q) = \frac{\sqrt{D(Q)}}{\bar{Q}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n D(Q_i)}}{\sum_{i=1}^n \bar{Q}_i} = \frac{\sqrt{V(Q_1)^2 \cdot \bar{Q}_1^2 + V(Q_2)^2 \cdot \bar{Q}_2^2 + \dots + V(Q_n)^2 \cdot \bar{Q}_n^2}}{\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \dots + \bar{Q}_n}, \quad (8.13)$$

где $V(Q_i)^2 = \frac{D(Q_i)}{\bar{Q}_i^2}$; $V(Q_i)$, \bar{Q}_i – коэффициент вариации и математическое ожидание i -ой случайной нагрузки Q_i .

Формулы справедливы для корреляционно несвязанных нагрузок.

В случае, когда отдельные независимые нагрузки по-разному приложены к конструкции и усилие в рассчитываемом элементе

(например, колонне) выражается линейной функцией $N = \sum_{i=1}^n \beta_i Q_i$, тогда коэффициент вариации случайного усилия N :

$$V(N) = \sqrt{V(Q_1)^2 \cdot c_1^2 + V(Q_2)^2 \cdot c_2^2 + \dots + V(Q_n)^2 \cdot c_n^2}, \quad (8.14)$$

где $c_i = \frac{\beta_i \bar{Q}_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{Q}_i}$. (8.15)

Например, для колонны, если Q_i – это распределенная нагрузка (кН/м²), то β_i – это грузовая площадь i нагрузки, м².

Приведенный (средний) коэффициент перегрузки:

$$\gamma_f = 1 + \beta \cdot V(N) = 1 + \beta \sqrt{\sum_{i=1}^n V(Q_i)^2 c_i^2}, \quad (8.16)$$

где β – характеристика безопасности;

$$\beta = \frac{\bar{S}}{\sigma(S)} = \frac{1}{V(S)}, \quad (8.17)$$

где S – случайная величина резерва прочности.

Расчетное усилие:

$$N_{расч} = \bar{N} + \beta \cdot \sigma(N) = \bar{N}(1 + \beta \cdot V(N)). \quad (8.18)$$

Приняв $V(Q_i) = \frac{\gamma_{fi} - 1}{\beta}$, где γ_{fi} – коэффициент перегрузки отдельных нагрузок, получим:

$$\gamma_f = 1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2 (\gamma_{fi} - 1)^2}; \quad (8.19)$$

если $\beta_i = 1$; $i = 1, n$;

$$q_1 = 0.1;$$

$$q_2 = 0.4;$$

$$q_3 = 0.32;$$

$$q_4 = 1.5;$$

$$q_5 = 0.13 \text{ кПа};$$

$$\gamma_{f1} = \gamma_{f2} = \gamma_{f3} = 1.3, \gamma_{f4} = 1.1, \gamma_{f5} = 1.05, \text{ то}$$

$$\sum_{i=1}^5 q_i = 2.45 \text{ кПа};$$

$$c_1 = \frac{0.1}{2.45}; c_2 = \frac{0.4}{2.45}; c_3 = \frac{0.32}{2.45}; c_4 = \frac{1.5}{2.45}; c_5 = \frac{0.13}{2.45};$$

и общий коэффициент перегрузки:

$$\gamma_f = 1 + \sqrt{\frac{1}{2.45^2} (0.1^2 \cdot 0.3^2 + 0.4^2 \cdot 0.3^2 + 0.32^2 \cdot 0.3^2 + 0.1^2 \cdot 1.5^2 + 0.13^2 \cdot 0.05^2)} = 1.089;$$

$$\sum q_n = 2.45 \text{ кПа}; \sum q = \sum q_n \cdot \gamma_f = 2.45 \cdot 1.089 = 2.67 \text{ кПа};$$

Учет всех коэффициентов в отдельности дает 2.8525 кПа (разница $\Delta = 6.4\%$).

Превышение нагрузкой заданного уровня

В большинстве случаев нагрузки, действующие на строительные конструкции, представляют собой случайные функции $Q(t)$. Случайная функция $Q(t)$ характеризуется математическим ожиданием $\bar{Q}(t)$ (детерминированная функция аргумента t) и корреляционной функцией $K_Q(t_1, t_2)$ (см (3.28)).

Обычно нагрузка $Q(t)$ – стационарный (или квазистационарный) случайный процесс и случайная функция.

Вернемся к формуле временной плотности вероятности выброса за уровень a для случайного стационарного процесса, т.е. когда случайная функция $X(t)$ независима со своей скоростью изменения $V(t) = \frac{dX(t)}{dt}$, тогда случайные функции $X(t)$ и $V(t)$ можно заменить случайными величинами X и V с плотностями распределения $P_Q(q)$ и $P_V(v)$:

$$q(a) = P_X(a) \int_0^{\infty} P_V(v) v dv. \quad (8.20)$$

Применительно к перегрузкам, т.е. превышению нагрузки $Q(t)$ или комбинации нескольких нагрузок некоторого допустимого уровня нагрузки a , запишем (аналогично (8.20)):

$$u(a) = P_Q(a) \int_0^{\infty} P_V(v) v dv, \quad (8.21)$$

где $u(a)$ назовем интенсивностью отказов конструкции, считая отказом превышение нагрузкой $Q(t)$ допускаемого для данной конструкции значения; $P_Q(a)$ и $P_V(v)$ – плотности распределения $Q(t)$ с аргументом a и $V(t)$.

Величина, обратная интенсивности отказов, – период отказа, т.е. средняя продолжительность интервала между соседними выбросами (отказами):

$$\theta(a) = \frac{1}{u(a)}. \quad (8.22)$$

В большинстве случаев соседние отказы могут считаться независимыми случайными событиями, т.е. период отказа $\theta(a)$ значительно превышает интервал времени $t_2 - t_1$, в течение которого корреляционная функция $K_Q(t_1, t_2) \approx 0$ и к ним (отказам) можно применять формулу вероятности неоявления редких событий:

$$P_t = \exp \left[- \int_0^t u(a) dt \right], \quad (8.23)$$

где P_t – вероятность того, что в течение времени t нагрузка $Q(t)$ ни разу не превысит значение a .

Функция P_t представляет собой интегральную функцию распределения максимума $Q(t)$ за время t . Тогда надежность конструкции при заданном сроке t :

$$N = P_Q(a)P_t = P_Q(a) \exp \left[- \int_0^t u(a) dt \right], \quad (8.24)$$

где $P_Q(a)$ – интегральная функция распределения случайной нагрузки $Q(t)$.

Связь между надежностью и интенсивностью отказов:

$$u(a) = - \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} (\ln N). \quad (8.25)$$

Лекция 9. Исследование прочности статически определимых систем. Распределение плотности вероятности прочности конструкции

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР ПРОЧНОСТИ

Нормативное сопротивление

Базовым параметром сопротивления материалов силовым воздействиям служит **нормативное сопротивление**, устанавливаемое с учетом случайной изменчивости прочностных (точнее, механических) свойств. Стандартом установлено, что **обеспеченность значений нормативных сопротивлений должна быть не менее 0,95**.

Для разных конструкционных материалов и грунтов нормативные значения прочностных и деформационных характеристик установлены по различным наиболее существенным показателям, например:

- для **"мягких" арматурных сталей** с физическим пределом текучести – по установленному соответствующим ГОСТом браковочному минимуму предела текучести;
- для **"твердых" сталей** без площадки текучести – по значению условного предела текучести;
- для конструкционных **сталей углеродистой и повышенной прочности**, а также для алюминиевых сплавов – по пределу текучести;
- для конструкционных сталей без площадки текучести, а также в случаях, когда по характеру работы конструкции несущая способность определяется не пластичностью, а прочностью, нормативное сопротивление определяется по временному сопротивлению;

- для **бетона** нормативное сопротивление определяется по результатам испытаний стандартных образцов в 28-дневном возрасте:
КУБОВ - класс бетона;
ПРИЗМ - нормативное сопротивление сжатию;
ВОСЬМЕРОК, ЦИЛИНДРОВ - на раскалывание;
БАЛОК на изгиб - нормативное сопротивление растяжению.
- для **древесины** - по результатам испытаний стандартных образцов без пороков ("ЧИСТЫХ");
- для **пластических масс** - то же, однако, для разных видов пластмасс размеры образцов различны.

Соответствующими стандартами установлены также другие нормативные характеристики материалов (объемная масса, модули упругости и сдвига, коэффициенты трения, сцепления, характеристики ползучести, усадки, температурного расширения, усушки, набухания и другие.).

Для **грунтов** естественных оснований определяющими характеристиками служат нормативные значения угла внутреннего трения, удельного сцепления, модуля деформации. Для скальных и вечномерзлых грунтов этими характеристиками служат сопротивление одноосному сжатию и сдвигу.

Отличительная особенность нормативных прочностных характеристик грунтов заключается в том, что они принимаются по среднестатистическим значениям, а не с обеспеченностью 0,95 как для конструкционных материалов.

Возможные отклонения нормативных характеристик конструкционных материалов и грунтов в неблагоприятную сторону учитываются **коэффициентами надежности по материалу и грунту γ_m** . Эти коэффициенты учитывают ряд факторов, не проявляющихся при стандартных испытаниях, но встречающихся в практике эксплуатации в "обычных" условиях (в отличие от "особых" условий, учитываемых дополнительно коэффициентом условий работы).

Коэффициент γ_m всегда больше единицы и для разных материалов колеблется в широких пределах. Наименьшее значение $\gamma_m = 1,025$ установлено для стального проката по некоторым ГОСТам и ТУ. Для высокопрочных сталей значение γ_m повышается до 1,15. Наибольшее общее значение $\gamma_m = 6$ принято для сопротивления древесины растяжению вдоль волокон при нормировании характеристики по результатам испытаний мелких стандартных образцов. Если исключить коэффициент длительного сопротивления, равный 0,66, то в чистом виде для этого случая $\gamma_m = 4$.

Для бетона коэффициент γ_m ближе к меньшим значениям, $\gamma_m = 1,3$ при сжатии и $\gamma_m = 1,5$ при растяжении. Для большинства пластмасс $\gamma_m = 1,3 - 1,7$.

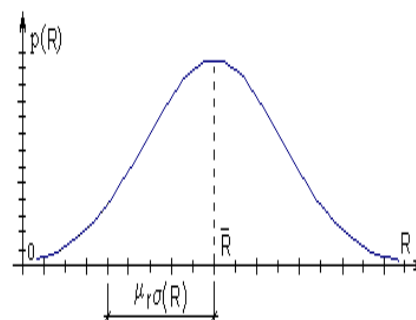
Такие различия объясняются разным набором учитываемых факторов. Для конструкционных сталей этот коэффициент учитывает только выборочный характер контроля (возможность случайного попадания в конструкции стали с пониженными характеристиками). Для древесины же коэффициент надежности по материалу учитывает масштабный эффект (малая доля) и влияние пороков структуры (сучки, косослой и другие допустимые для данного сорта дефекты), разное для разных видов напряженного состояния.

Начальная прочность материалов в строительных нормах

В действующих документах нормативные значения не совпадают с м.о. и сдвинуты по отношению к среднему значению.

$$\begin{cases} F_n = \bar{F} + \bar{F}\mu_f V(F) = \bar{F} + \mu_f \sigma(F) \\ R_n = \bar{R} - \bar{R}\mu_r V(R) = \bar{R} - \mu_r \sigma(R) \end{cases}, \quad (9.1)$$

где \bar{F} , $V(F)$ – м.о. и коэффициент вариации нормативного значения нагрузки; \bar{R} , $V(R)$ – то же сопротивления; μ_f , μ_r – коэффициенты, показывающие какое число стандартов отсчитывается от м.о. при назначении нормативных значений нагрузки и сопротивления.



При коэффициенте изменчивости прочности менее 0,06–0,08 применяется нормальный закон распределения (т.е. не учитываются моменты высших порядков – асимметрия и эксцесс). Более всего это относится к стали, для бетона, каменной кладки, древесины и других материалов с коэффициентом изменчивости 0,15–0,25 корректнее использовать более точные законы распределения, учитывающие асимметрию и эксцесс. Например, функция распределения, полученная из распределения Пирсона III типа:

$$P(x) = \frac{1}{\bar{X}} \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\frac{\gamma}{b}} \frac{1}{\Gamma(\gamma)b} e^{-\left[\frac{\Gamma(\gamma+b)X}{\Gamma(\gamma)\bar{X}} \right]^{\frac{1}{b}}} \left(\frac{X}{\bar{X}} \right)^{\frac{\gamma}{b}-1}, \quad (9.2)$$

где γ и b – параметры, учитывающие асимметрию.

$$\left\{ \begin{aligned} V_x^2 &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{[\Gamma(\gamma+b)]^2} - 1, \quad V_x^2 = D_x / \bar{X}^2 \\ \mu_3(x) &= \frac{(\Gamma(\gamma))^2 \Gamma(\gamma+3b)}{[\Gamma(\gamma+b)]^3} - 3 \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{[\Gamma(\gamma+b)]^2} + 2 \end{aligned} \right., \quad (9.3)$$

$$\text{асимметрия} \quad A = \frac{\mu_3}{2\sigma_x^3}. \quad (9.4)$$

По СНиП II-23-81 «Стальные конструкции. Нормы проектирования» (приложение 8а, стр. 92) при испытаниях металла **нормативное значение** предела текучести R_{yn} или временного сопротивления стали R_{un} определяется по результатам статистической обработки:

$$R_n = M(R) - \alpha \cdot \sigma(R), \quad (9.5)$$

где $M(R)$ – математическое ожидание предела текучести или временного сопротивления; $\sigma(R)$ – среднеквадратическое отклонение предела текучести или временного сопротивления.

$$M(R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i; \quad (9.6)$$

или по (3.8)

$$M(R) = \sum_{i=1}^n R_i p_i, \quad (9.7)$$

где $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. R_i появляется один раз; p_i – вероятность появления возможных значений R_i предела текучести или временного сопротивления; n – число испытанных образцов (полная группа несовместных событий); $\alpha = f(n)$ – коэффициент, учитывающий объем выборки.

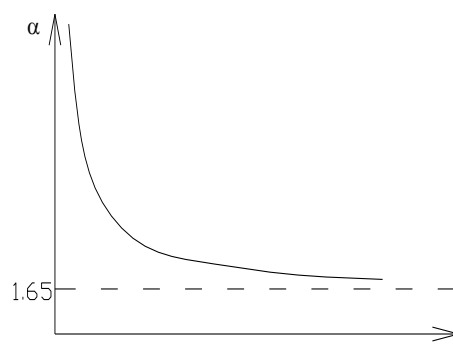
$$\alpha = 1.65 \left(1 + \frac{0.91}{\sqrt{n}} + \frac{1.5}{n} \right), \quad (9.8)$$

при $n = 3 \Rightarrow \alpha = 3.342$;

$n = 10 \Rightarrow \alpha = 2.372$;

$n = 100 \Rightarrow \alpha = 1.825$;

$n = \infty \Rightarrow \alpha = 1.645 = \mu_r$,



α показывает, на какое число стандартов $\sigma(R)$ сдвинуто нормативное сопротивление по отношению к математическому ожиданию.

Чем больше n , тем достовернее полученные результаты, тем меньше α и больше R_n (R_{yn} или R_{un}).

$$\sigma(R) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - M(R))^2}. \quad (9.9)$$

При значении коэффициента вариации (изменчивости) $\nu(R) = \frac{\sigma(R)}{M(R)} > 0.1$ использовать результаты, полученные из опытов, не допускается, так как они ненадежны. Кроме того, коэффициентом надежности по материалу $\gamma_m > 1$ учитывается разброс найденных нормативных сопротивлений (изменчивость в неблагоприятную сторону).

Расчетное сопротивление вычисляется по формулам (здесь – для стальных конструкций):

$$R_y = \frac{R_{yn}}{\gamma_m} \quad \text{– по пределу текучести;}$$

или

$$R_u = \frac{R_{un}}{\gamma_m} \quad \text{– по пределу прочности.}$$

Нормативные значения принимаются с обеспеченностью 0.95 (т.е. вероятность того, что случайное фактическое сопротивление $R > R_n$ равна 0.05), тогда вероятность непревышения:

$$P(R_n) = \int_{-\infty}^{R_n} P(x) dx = 0.05$$

или, приняв нормальное распределение, через интеграл вероятности Гаусса $\Phi(x)$:

$$P(R_n) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{R_n - \bar{R}}{\sigma(R)}\right) = 0.05.$$

ПРИМЕР 1.

Определим математическое ожидание предела текучести для стали С235. Примем $\nu(R) = 0.1$ (худший вариант), и тогда

$$\begin{aligned} P(R_{yn}) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{R_{yn} - \bar{R}_y}{\sigma(R)}\right) = 0.05 &\Rightarrow \Phi\left(\frac{\bar{R}_y - R_{yn}}{\sigma(R)}\right) = 0.45 \Rightarrow \frac{\bar{R}_y - R_{yn}}{0.1R_y} = 1.645 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{R}_y = 281 \text{ МПа при } R_{yn} = 235 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\text{При изменчивости } \nu(R) = \frac{\sigma(R)}{\bar{R}_y} = 0.05 \Rightarrow \bar{R}_y = 256 \text{ МПа.}$$

Определим, насколько сдвинуто влево от математического ожидания предела текучести \bar{R}_y расчетное сопротивление по пределу текучести R_y .

$$\gamma_m = 1.025; \nu(R) = 0.05; R_{yn} = 235 \text{ МПа; } \bar{R}_y = 256 \text{ МПа;}$$

$$R_y = \frac{R_{yn}}{\gamma_m} = \frac{235}{1.025} = 230 \text{ МПа;}$$

$$\Delta = \bar{R}_y - R_y = 256 - 230 = 26 \text{ МПа;}$$

$$\sigma(R) = \nu(R)\bar{R}_y = 0.05 \cdot 256 = 12.8 \text{ МПа.}$$

Таким образом, расчетное сопротивление сдвинуто влево от математического ожидания предела текучести \bar{R}_y на $\frac{\Delta}{\sigma(R)} = \frac{26}{12.8} = 2\sigma(R)$ и вероятность того, что предел текучести будет меньше расчетного сопротивления \bar{R}_y , равна:

$$P(R_y) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{R_y - \bar{R}_y}{\sigma(R)}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{230 - 256}{12.8}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(2) = 0.0228$$

Обеспеченность расчетного сопротивления этой стали равна

$$1 - P(R_y) = 1 - 0.0228 = 0.9772.$$

Нормами строго установлена обеспеченность расчетных сопротивлений только для древесины и древесных пластиков. Она составляет 0,99 и выше. Для бетонов, кирпича и других конструкционных материалов нет единой обеспеченности этой важнейшей прочностной характеристики, используемой при проектировании.

Нужно также учитывать, что в СНиПах приведены округленные значения прочностных и деформационных характеристик. Это в определенной степени влияет на обеспеченность расчетных значений.

ПРИМЕР 2.

Определить обеспеченность расчетного сопротивления изгибу древесно-стружечных плит со следующими характеристиками:

$R^H = 16$ МПа, $R = 5,76$ МПа, коэффициент вариации $v = 0,16$, коэффициент длительного сопротивления $m_{дл} = 0,53$, масштабный коэффициент $k_p = 0,8$.

РЕШЕНИЕ:

Коэффициент надежности по материалу вычислим из соотношения между нормативным и расчетным сопротивлением с учетом того, что масштабный эффект и различие длительной и кратковременной прочности учитываются отдельными коэффициентами, которые будем считать детерминированными.

Из соотношений расчетного и нормативного сопротивлений для древесины и древесных пластиков

$$R = R^H \frac{m_{дл} k_p}{\gamma_m}$$

отсюда

$$\gamma_m = \frac{R^H}{R} m_{дл} k_p = \frac{16}{5,76} 0,53 \cdot 0,8 = 1,178.$$

Выразим нормативное сопротивление через временное с учетом того, что обеспеченность его 0,95:

$$R^H = R_{cp}(1 - 1,645v),$$

где коэффициент 1,645 определяет обеспеченность 0,95.

В свою очередь, так же можно выразить расчетное сопротивление

$$R = R_{cp}(1 - tv),$$

где t определяет неизвестную обеспеченность.

Из этих соотношений

$$\gamma_m = \frac{R^H}{R} = \frac{1 - 1,645v}{1 - tv}$$

и отсюда

$$t = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{1 - 1,645v}{\gamma_m} \right) = \frac{1}{0,16} \left(1 - \frac{1 - 1,645 \cdot 0,16}{1,178} \right) = 2,34.$$

По таблице $\Phi(t)$ находим, что такой коэффициент соответствует значению интеграла вероятностей $\Phi(t) = 0,490$.

Тогда вероятность превышения расчетного сопротивления составляет

$$0,5 - \Phi(t) = 0,50 - 0,49 = 0,01,$$

что соответствует обеспеченности $P = 1 - 0,01 = 0,99$.

Именно такое значение обеспеченности приведено для древесных плит в нормах по проектированию деревянных конструкций.

Решим эту же задачу для случая действия только кратковременной нагрузки малой продолжительности, соизмеримой с длительностью стандартных испытаний (например, при сейсмической нагрузке), когда $m_{дл} = 1$. Тогда

$$\gamma_m = \frac{16 \cdot 1 \cdot 0,8}{5,76} = 2,222$$

$$t = \frac{1}{0,16} \left(1 - \frac{1 - 1,645 \cdot 0,16}{2,222} \right) = 4,1775$$

$$\Phi(t) = 0,499985;$$

$$0,5 - \Phi(t) = 0,000015.$$

Обеспеченность в этом случае составляет

$$P = 1 - 0,000015 = 0,999985$$

Таким образом, при совместном действии длительной и кратковременной (снеговой) нагрузок в течение примерно двух месяцев может разрушиться 1 образец древесных плит из 100, а при кратковременном нагружении до напряжений $\sigma = R^H$ - только 15 образцов из 1000000 (МИЛЛИОНА) или 1 из 66667.

9.2. Влияние износа и изменения прочности во времени

Износ (ржавление, гниение, старение) – изменение прочности конструкции или ее элементов во времени. Если прочность R – случайная величина, то при наличии износа ее следует считать случайной функцией времени $R(t)$.

$$\text{Запишем: } S(t) = R(t) - F(t), \quad (9.10)$$

где $S(t)$ – случайная функция резерва прочности.

Отказом будет являться переход случайной функции $S(t)$ через нуль в отрицательную область ($S(t) < 0$).

При отсутствии взаимной корреляционной связи между $F(t)$ и $R(t)$ (т.е. $F(t)$ и $R(t)$ независимы и их взаимная корреляционная функция $K_{FR}(t_1, t_2) = 0$) математическое ожидание случайной функции $S(t)$ (как детерминированной функции аргумента t):

$$\bar{S}(t) = \bar{R}(t) - \bar{F}(t). \quad (9.11)$$

Автокорреляционная функция для $S(t)$:

$$K_S(t_1, t_2) = K_R(t_1, t_2) + K_F(t_1, t_2). \quad (9.12)$$

Дисперсия для функции $S(t)$ при $t_1 = t_2 = t$:

$$D_S(t) = D_R(t) + D_F(t). \quad (9.13)$$

Аналогично временная плотность вероятности того, что $S(t) < 0$:

$$q(0) = - \int_{-\infty}^0 P_{SV}(0, v) v dv, \quad (9.14)$$

где $v = \dot{f}(t)$, вместо аргумента s – значение 0; $P_{SV}(s, v)$ – совместное распределение значений $s = 0$ и ее производной в данный момент времени. Знак минус указывает на то, что выбросы происходят в отрицательном направлении.

$$v(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt} - \frac{dF(t)}{dt}. \quad (9.15)$$

Если приближенно считать, что случайные ординаты s и v функций $S(t)$ и $V(t)$ – независимые случайные величины, то

$$q(0) = -P_S(0) \int_{-\infty}^0 P_V(v) v dv = -P_S(0) \bar{v}, \quad (9.16)$$

где \bar{v} – математическое ожидание отрицательной величины v для данного момента времени; q зависит от t , так как $\bar{v}(t)$ – математическое ожидание отрицательной скорости изменения случайной функции $S(t)$.

Если износ практически отсутствует, то прочность не зависит от времени и представляет собой не случайную функцию, а случайную величину R . При этом:

$$S(t) = R - F(t) \quad (9.17)$$

и, соответственно, $\bar{S}(t) = \bar{R} - F(t)$; $K_s(t_1, t_2) = D(R) + K_F(t_1, t_2)$. (9.18)

Далее: $v(t) = -\frac{dF(t)}{dt}$, так как $\frac{dR(t)}{dt} = 0$. (9.19)

И тогда **функция надежности конструкции** (вероятность неразрушения за период t):

$$P_t = [1 - P_s(0)] \cdot \exp\left[-\int_0^t q(0)dt\right], \quad (9.20)$$

где $P_s(0)$ – интегральная функция распределения резерва прочности S в начальный момент времени $t=0$, (т.е. $P_s(S)$ при $S=0$, представляющая собой вероятность разрушения в начальный момент времени $t=0$ или вероятность мгновенного отказа).

Тема 3: Элементы теории усталости. Усталостное разрушение как случайный процесс

Лекция 10. Основные понятия теории усталости. Усталостное разрушение. Механизм усталостного разрушения

Первые наблюдения усталостного разрушения относятся к концу XVIII века, когда у длительно эксплуатируемых дилижансов в Англии и почтовых карет во Франции неожиданно для инженерного мира стали хрупко ломаться оси, изготовленные из кованого железа, обладающего высокой пластичностью. Специалисты того времени объясняли это явление перерождением материала за счет его усталости в процессе длительной эксплуатации под действием переменных напряжений, возникающих из-за неровностей дороги. С тех пор термин "Усталость материалов", хотя не отражающий полностью сложные процессы, протекающих в металле под воздействием напряжений, переменных во времени, нашёл высокое распространение в инженерных методах расчёта надёжности элементов конструкций.

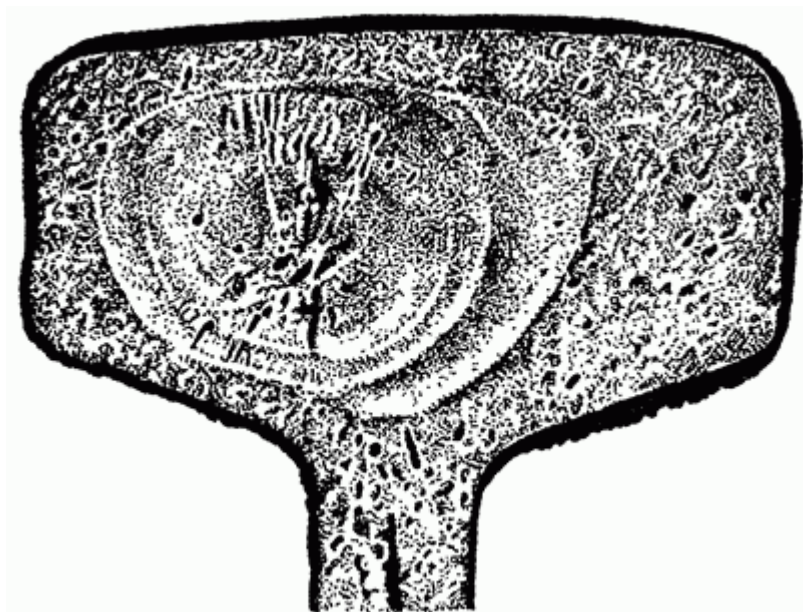
Первые систематические экспериментальные исследования сопротивления усталостному разрушению стальных образцов при действии переменных нагрузок были проведены немецким ученым А.

Велером, который опубликовал результаты исследований в виде итоговых таблиц в 1870 г.. Графическое представление этих результатов в виде кривых усталости впервые было осуществлено Л. Шпангенбергом в 1875 г., хотя в мировой практике эти кривые связываются только с именем А. Велера.

Усталость материалов и в настоящее время является одной из основных причин отказа деталей машин и элементов конструкции, подверженных действию напряжений, циклически изменяющихся во времени. В связи с этим для повышения ресурса и надежности подобных конструкций большое значение приобретают вопросы выбора материала, обоснования режимов технологии производства полуфабрикатов и деталей и организации контроля технологического процесса, обеспечивающие стабильное и высокое сопротивление элементов конструкций усталостному разрушению.

Усталостное разрушение. Механизм усталостного разрушения

Причиной этого является некоторая неизбежная неоднородность структуры металла (наличие в нем зерен, микроскопических трещин и т. п.), в связи с чем в окрестности отдельных точек материал обладает пониженной прочностью. При однократном нагружении это приводит к некоторому перераспределению напряжений в материале, но не вызывает его разрушения. При действии же переменных многократно повторяющихся напряжений в окрестностях точек с пониженной прочностью возникают микроскопические трещины. У концов этих трещин (а также у трещин, имевшихся в материале еще до его нагружения) возникает высокая концентрация напряжений, приводящая к развитию трещин по мере увеличения числа циклов. Если рабочая площадь сечения элемента в результате развития трещин уменьшается настолько, что сечение не выдерживает возникающего в нем усилия, происходит разрушение элемента. Процесс постепенного накопления повреждений материала при действии повторно-переменных напряжений, приводящий к образованию трещин и разрушению, называется усталостью материала. При переменных напряжениях поверхности развивающихся трещин многократно трутся друг о друга, в результате чего они шлифуются. Поэтому поверхность излома при усталостном разрушении состоит из двух зон: одна из них имеет нормальную для металла зернистую структуру, а другая имеет шлифованную поверхность.



Усталостное разрушение детали происходит всегда внезапно (т. е. так, как разрушается хрупкий материал при статическом действии нагрузки) независимо от того, является металл хрупким или пластичным.

Решения проблемы повышения ресурса и надёжности машин обуславливает разработку и внедрение вероятностных методов расчёта на прочность при переменных напряжениях, учитывающих случайный характер действующих нагрузок и вариацию характеристик сопротивления усталости материалов и деталей.

Характеристики сопротивления усталостному разрушению материала и изделий определяются в результате испытаний на усталость образцов, моделей, натурных деталей и конструкций в целом, что требует больших материальных затрат и весьма длительного времени, которого, как правило, не хватает конструктору на стадии проектирования и доводки конструкции. В связи с этим ученые многих стран ведут поиски расчётных (косвенных) методов оценки характеристик сопротивления усталостному разрушению и методов ускоренных и форсированных испытаний на усталость.

Основные термины

Усталость – процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

Сопротивление усталости – свойство материала противостоять усталости.

Усталостное повреждение – необратимое изменение физико-механических свойств материала объекта под действием переменных напряжений.

Усталостная трещина – частичное разделение материала под действием переменных напряжений.

Скорость роста усталостной трещины – отношение приращения длины усталостной трещины к интервалу времени.

ЦИКЛЫ НАПРЯЖЕНИЙ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИКЛА

Совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения при регулярном нагружении (рис.10.1) называется **циклом напряжений**.

Характеристики цикла напряжений.

Частота циклов (f) – отношение числа циклов напряжений к интервалу времени их действия.

Период цикла (T) – продолжительность одного цикла напряжений, $T=1/f$ (рис.10.1.).

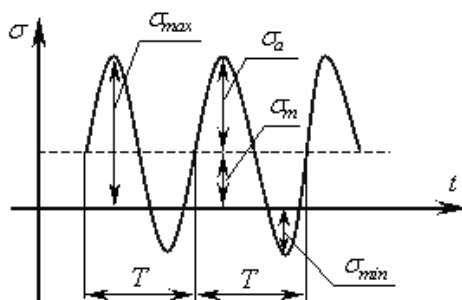


Рис. 10.1. Циклы напряжений

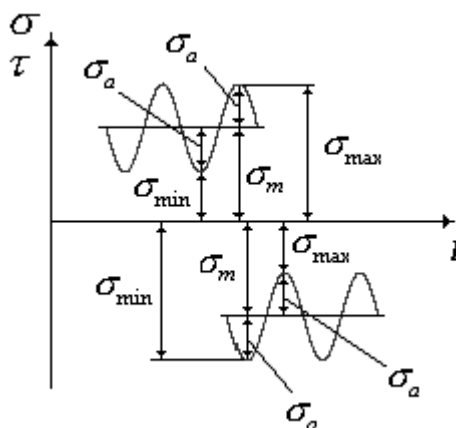


Рис.10.2. Параметры циклов нагружения в области растяжения и сжатия

Максимальное напряжение цикла (σ_{max}) – наибольшее по алгебраическому значению напряжение цикла (рис. 10.1., рис. 10.2.)

Минимальное напряжение цикла (σ_{min}) – наименьшее по алгебраическому значению напряжение цикла (рис.10.1, 10.2).

Среднее напряжение цикла (σ_m) – постоянная (положительная или отрицательная) составляющая цикла напряжений (рис.10.1, 10.2), равная

алгебраической полусумме максимального и минимального напряжения цикла,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (10.1)$$

Амплитуда напряжений цикла σ_a – наибольшее числовое положительное значение переменной составляющей цикла напряжений (рис.10.1., рис.10.2.), равная алгебраической полуразности максимального и минимального напряжения цикла

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (10.2)$$

Размах напряжений цикла ($2\sigma_a$) – алгебраическая разность максимального и минимального напряжения цикла.

$$2\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (10.3)$$

Коэффициент асимметрии цикла напряжений (R_σ) – отношение минимального напряжения цикла к максимальному

$$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (10.4)$$

РАЗНОВИДНОСТИ ЦИКЛОВ НАПРЯЖЕНИЙ

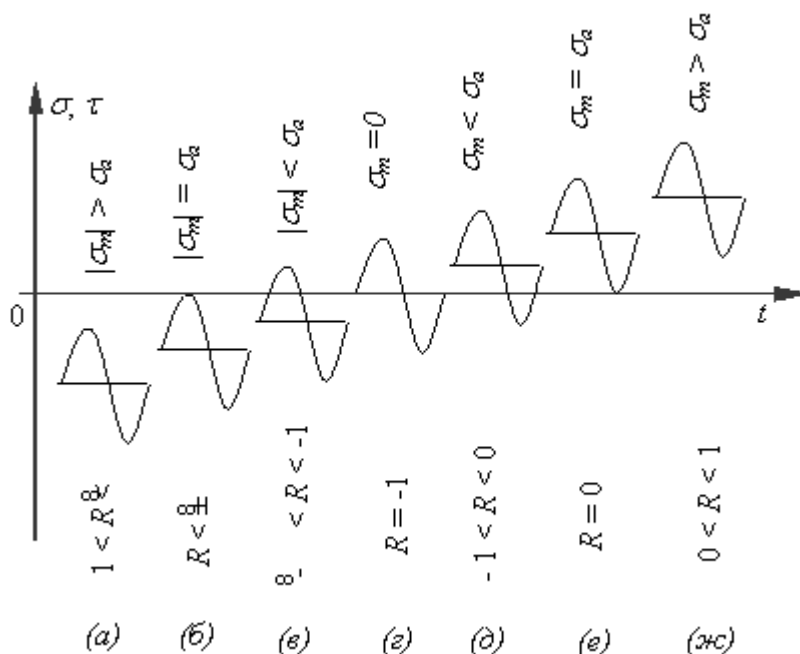


Рис. 10.3. Разновидности циклов напряжений и соответствующие им значения коэффициентов асимметрии

Симметричный цикл напряжений (рис.10.3, г) – цикл, у которого максимальное и минимальное напряжения равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} ;$$
$$R_{\sigma} = 1.$$

Асимметричный цикл напряжений (рис.10.3, а, б, в, д, е, ж) – цикл, у которого максимальные и минимальные напряжения имеют разные абсолютные значения

$$\sigma_m \neq 0$$

Знакопеременный цикл напряжений (рис. 10.3, в, г, д) – цикл напряжений, изменяющихся по значению и по знаку

$$\sigma_{\max} > 0$$
$$\sigma_{\min} < 0$$

Знакопостоянный цикл напряжений (рис.10.3, а, б, е, ж) – цикл напряжений, изменяющихся только по абсолютному значению.

Отнулевой цикл напряжений (рис.10.3, б, е) – знакопостоянный цикл напряжений, изменяющихся от нуля до максимума ($\sigma_{\min} = 0$) или от нуля до минимума ($\sigma_{\max} = 0$)

Подобные циклы напряжений — циклы, у которых коэффициенты асимметрии одинаковы.

1.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОПРОТИВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Циклическая долговечность (N) – число циклов напряжений, выдержанных нагруженным объектом до образования усталостной трещины определенной протяженности или до усталостного разрушения, при неизменных характеристиках цикла напряжений.

Малоцикловая усталость – усталость материала, при которой усталостное повреждение или разрушение происходит при упруго-пластическом деформировании. Условно принимают, что при $N < 50000$ циклов имеет место малоцикловая усталость.

Многоцикловая усталость – усталость материала, при котором усталостное повреждение или разрушение происходит, в основном, при упругом деформировании. Условно принимают, что при $N > 50000$ циклов имеет место многоцикловая усталость.

База испытаний – предварительно задаваемое наибольшее число циклов при испытании на усталость.

Лекция 11. Кривые Велера. Факторы, влияющие на сопротивление разрушению. Влияние концентрации напряжений, масштабный фактор и другие

Кривые Велера

Кривая усталости $N(\sigma)$ – график, характеризующий зависимость между максимальными напряжениями или амплитудами цикла и циклической долговечностью одинаковых образцов, построенный по параметру среднего напряжения цикла или по параметру коэффициента асимметрии цикла (рис.11.1, а, б). Участок I на рис.11.1 соответствует малоцикловой усталости, а участки II и III – многоцикловой. Участок III для углеродистых и низколегированных сталей обычно имеет горизонтальный линейный характер. Для высоколегированных сталей и сплавов на магниевой, алюминиевой и титановой основах этот участок представляет собой кривую, стремящуюся к асимптоте при $N = \infty$.

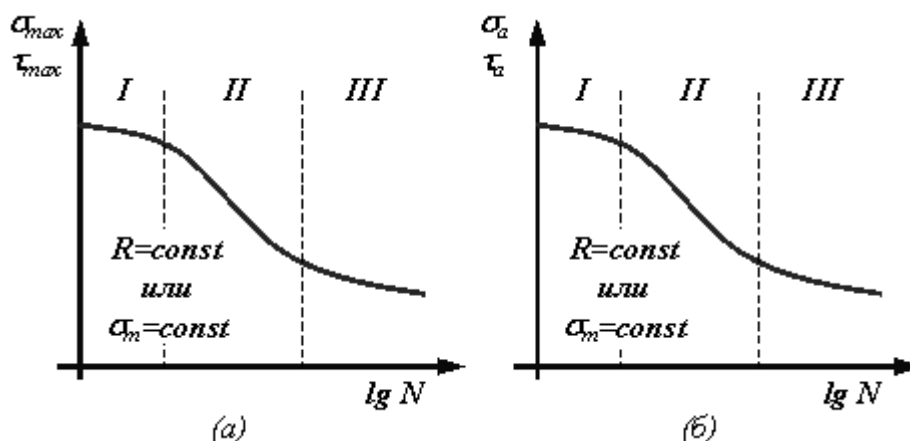


Рис. 11.1. Варианты представления кривой усталости.

РАЗНОВИДНОСТИ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ УСТАЛОСТИ

Для описания кривых усталости сталей используются:

Уравнение Велера (1870 г.)

$$\sigma = a - b \lg N \quad \text{или} \quad \lg N = c - d \sigma \quad (11.1)$$

Уравнение Басквина (1910 г.)

$$\sigma = a N^{-b} \quad \text{или} \quad \lg N = c - d \lg \sigma \quad (11.2)$$

Уравнение Штрмейера (1914 г.)

$$\sigma = \sigma_R + aN^{-\epsilon} \quad \text{или} \quad \lg N = c - d \lg(\sigma - \sigma_R) \quad (11.3)$$

Уравнение Пальмгрена (1924 г.)

$$\lg(\sigma - \sigma_R) = a - \epsilon \lg(N + B) \quad \text{или} \quad \lg(N + B) = c - d \lg(\sigma - \sigma_R) \quad (11.4)$$

Уравнение Вейбулла (1949 г.)

$$\lg \left(\frac{\sigma - \sigma_R}{\sigma_s - \sigma_R} \right) = a - \epsilon \lg(N + B) \quad \text{или} \quad \lg(N + B) = c - d \lg \left(\frac{\sigma - \sigma_R}{\sigma_s - \sigma_R} \right) \quad (11.5)$$

Уравнения (11.1) и (11.2) описывают только II участок кривых усталости, уравнение (11.3) – II и III участки, уравнения (11.4) и (11.5) охватывают все три участка кривых усталости.

Применительно к легким сплавам (магниевым, алюминиевым и титановым) для указанных участков кривых усталости могут использоваться уравнения (11.3), (11.4) и (11.5).

Однако, как показали специальные исследования [1,2], более адекватно экспериментальным данным соответствует уравнение Степнова М.Н. (1970 г.).

$$\sigma = \sigma_R + a \lg(N + N_1)^{-\alpha} \quad (11.6)$$

Параметр В в уравнениях (11.4) и (11.5), а также параметр N_1 , в уравнении (11.6), определяют положение кривой усталости только в малоциклового области (участок I на рис. 11.4). Поэтому при описании кривой многоциклового усталости без ущерба для точности принимают $B=0$ и $N_1=0$.

Коэффициент чувствительности к асимметрии цикла напряжений ψ_σ – величина, определяемая по формуле

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (11.7)$$

где σ_0 – предел прочности, σ_{-1} – предел выносливости.

Предел выносливости. (σ_{-1})

Максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостное разрушение при базе испытания 10^6 циклов.

Примечание: Пределы выносливости выражают в номинальных напряжениях. [[ГОСТ 23207-78](#), статья 47]

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений называют выносливостью, а проверку прочности элементов конструкции при действии таких напряжений – расчетом на выносливость (или расчетом на усталостную прочность).

Для получения механических характеристик материала, необходимых для расчетов на прочность при переменных напряжениях, проводят специальные испытания на выносливость (на усталость). Для этих испытаний изготавливают серию совершенно одинаковых образцов (не менее 10 штук).

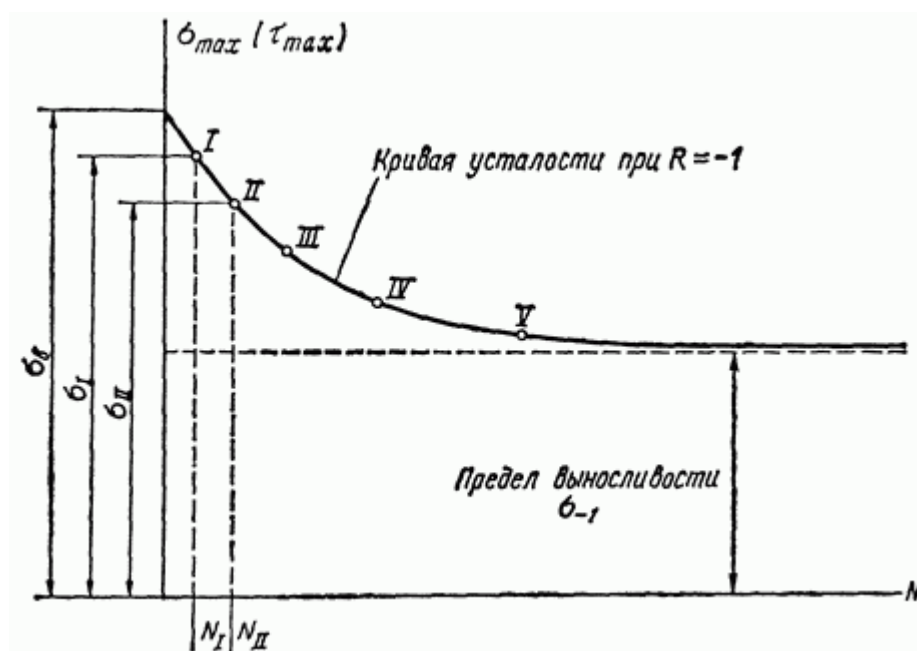


Рис. 11.5.

Наиболее распространены испытания на чистый изгиб при симметричном цикле изменения напряжений; их проводят в следующем порядке.

В первом образце с помощью специальной машины создают циклы напряжений, характеризуемые значениями I, напряжение II принимают достаточно большим (немного меньшим предела прочности материала III), для того, чтобы разрушение образца происходило после сравнительно небольшого числа циклов IV. Результат испытания образца наносят на график в виде точки V, абсцисса которой равна (в принятом масштабе) числу циклов, вызвавших разрушение образца, а ордината – значению напряжения (рис. 11.5.).

Затем другой образец испытывают до разрушения при напряжениях I – V. Результаты испытания этого образца изображаются на графике. Испытывая остальные образцы из той же серии, аналогично получают точки IV, V и т. д. Соединяя полученные по данным опытов точки плавной кривой, получают так называемую кривую усталости, или кривую Велера (рис. 11.5.), соответствующую симметричным циклам.

Аналогично могут быть получены кривые усталости, соответствующие циклам с другими значениями коэффициента асимметрии.

Разрушение материала при однократном нагружении происходит в тот момент, когда возникающие в нем напряжения равны пределу прочности. Следовательно, кривые усталости при разрушении имеют ординаты, равные пределу выносливости.

Кривая выносливости (рис. 11.5.) показывает, что с увеличением числа циклов уменьшается максимальное напряжение, при котором происходит разрушение материала. Кривая усталости для мало или среднеуглеродистой, а также для некоторых марок легированной стали имеет горизонтальную асимптоту. Следовательно, при данном значении коэффициента асимметрии R и максимальном напряжении, меньшем некоторой величины, материал не разрушается, как бы велико ни было число циклов.

Наибольшее (предельное) максимальное напряжение цикла, при котором не происходит усталостного разрушения образца из данного материала после произвольно большого числа циклов, называют **пределом выносливости**. Таким образом, предел выносливости равен ординате асимптоты кривой усталости. Его обозначают σ_{-1} ; при симметричном цикле коэффициент асимметрии (R_σ), и предел выносливости при этом цикле обозначают $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ при $R_\sigma = 1$ (см. рис. 11.5.).

Совершенно очевидно, что при испытании образца невозможно бесконечно большое число раз повторить один и тот же цикл напряжений, но в этом и нет необходимости. Ординаты кривой усталости для некоторых материалов (мало- и среднеуглеродистой стали и др.) после некоторого числа циклов (равного нескольким миллионам) почти не изменяются; поэтому числу циклов, даже в несколько раз большему, на кривой усталости соответствуют такие же максимальные напряжения. В связи с этим число циклов (при испытании материала на выносливость) ограничивают некоторым пределом, который называют базовым числом

циклов. Если образец выдерживает базовое число циклов, то считается, что напряжение в нем не выше предела выносливости. Для стали и чугуна базовое число циклов принимают равным 10^7 .

Предел выносливости для стали при симметричном цикле в несколько раз меньше предела прочности (в частности, для углеродистой стали 0,43).

Кривые усталости для цветных металлов и сплавов и некоторых легированных сталей не имеют горизонтальной асимптоты, и, следовательно, такие материалы могут разрушиться при достаточно большом числе циклов, даже при сравнительно малых напряжениях.

Поэтому понятие предела выносливости для указанных материалов условно. Точнее, для этих материалов можно пользоваться лишь понятием предел ограниченной выносливости, называя так наибольшее значение максимального (по абсолютной величине) напряжения цикла, при котором образец еще не разрушается при определенном (базовом) числе циклов. Базовое число циклов в рассматриваемых случаях принимают очень большим — до 10^7 .

В случаях, когда срок службы элемента конструкции, в котором возникают переменные напряжения, ограничен, максимальные напряжения могут превышать предел выносливости; они, однако, не должны быть больше предела ограниченной выносливости, соответствующего числу циклов за время работы рассчитываемого элемента. Следует заметить, что предел выносливости при центральном растяжении-сжатии образца составляет примерно 0,7-0,9 предела выносливости при симметричном цикле изгиба. Это объясняется тем, что при изгибе внутренние точки поперечного сечения напряжены слабее, чем наружные, а при центральном растяжении-сжатии напряженное состояние однородно. Поэтому при изгибе развитие усталостных трещин происходит менее интенсивно.

Предел выносливости при симметричном цикле кручения для стали составляет в среднем 0,58 (58% предела выносливости при симметричном цикле изгиба).

Факторы, влияющие на сопротивление разрушению

Местные напряжения. Коэффициент концентрации напряжений

В сечениях деталей, где имеются резкие изменения размеров, надрезы, острые углы, отверстия, возникают высокие местные напряжения (так называемая концентрация напряжений). В этих сечениях, как правило,

развиваются трещины усталости, приводящие в итоге к разрушению детали. Местные напряжения $\sigma_{\text{мест}}$ обычно значительно превышают те наибольшие значения напряжений, которые получились бы при отсутствии причин, вызывающих концентрацию. Зависимость между местными и так называемыми номинальными напряжениями, т.е. вычисляемыми по формулам сопротивления материалов, имеет вид:

$$\sigma_{\text{мест}} = k_{\sigma} \sigma, \quad (11.8)$$

где k_{σ} – коэффициент концентраций напряжений.

Местные напряжения очень уменьшают предел выносливости. Поэтому изделиям, работающим при напряжениях, переменных во времени, следует по возможности придавать форму, не имеющую резкого изменения сечения, ослаблений и выточек, вызывающих концентрацию напряжений.

Предел выносливости зависит также от размеров детали и качества обработки ее поверхности. При увеличении размеров детали предел выносливости понижается. Это явление учитывается так называемым масштабным фактором ε .

Характер обработки поверхности учитывается коэффициентом чистоты поверхности β , который изменяется от 0,6 до 1,0 при обычных методах обработки деталей. Если же поверхность детали подвергается специальному упрочнению (азотирование, цементация и т.п.), то коэффициент чистоты поверхности может быть больше единицы.

Когда известны пределы выносливости образца σ_R , масштабный фактор ε , коэффициент чистоты поверхности β и эффективный коэффициент концентрации напряжений детали k_{σ} , то при заданном коэффициенте запаса прочности $[n]$ можно определить допускаемое напряжение изгиба при симметричном цикле для данной детали по формуле:

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_R \varepsilon \beta}{k_{\sigma} [n]}. \quad (11.9)$$

При симметричном цикле растяжения-сжатия:

$$[\sigma_{-1}]_0 = \frac{\sigma_{-1p\epsilon\beta}}{k_\sigma [n]}, \quad (11.10)$$

где предел выносливости $\sigma_{-1} \approx 0,8[\sigma_{-1}]$.

Аналогично в случае симметричного цикла кручения

$$[\tau_{-1}] = \frac{\tau_{-1p\epsilon\beta}}{k_\tau [n]}, \quad (11.11)$$

где $\tau_{-1} \approx 0,6\sigma_{-1}$ для стали; k_τ – коэффициент концентрации касательных напряжений.

Лекция 12. Модель процесса накопления усталостных повреждений

Природа усталостного разрушения

В действительности усталостное разрушение наблюдается почти всегда при неоднородном напряженном состоянии, при изгибе или при растяжении изделия, имеющего [концентратор](#) напряжения. В том месте, где напряжение является наибольшим, обычно на поверхности, возникает трещина, которая постепенно распространяется вглубь. Несмотря на наличие трещины, изделие еще не теряет несущей способности и может выдержать несколько тысяч и даже миллионов циклов. Когда трещины достигают достаточной глубины и напряжения в неразрушенной части сечения, которая воспринимает всю нагрузку, оказывается настолько большим, что материал не может их выдержать, происходит внезапный излом. Сечение образца, поломанного в результате испытания на усталость при изгибе, схематически показано на рис. 12.1.

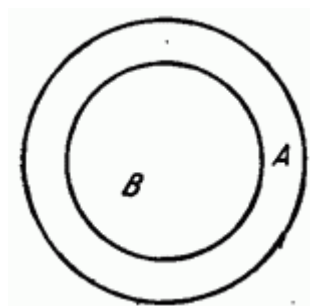


Рис. 12.1

В кольцевой области А поверхность излома представляется мелкозернистой, блестящей, со сглаженными неровностями. Усталостная

трещина раскрывается в растянутой зоне и смыкается в сжатой, результатом этого является обмятие поверхности трещины, иногда эта поверхность кажется как бы заполированной. В области В наблюдается типичная картина хрупкого разрушения, здесь видны относительно крупные зерна, сохранившие острые ребра, поверхность излома матовая. Распространение усталостной трещины обычно начинается от некоторого очага начального разрушения; где вследствие тех или иных причин создана большая местная концентрация напряжений или имеется какой-либо дефект материала. При испытании на знакопеременный изгиб первые трещины образуются почти одновременно в нескольких точках на поверхности образца, распространение их схематически показано на рис. 12.2.; иногда на изломе можно обнаружить несколько отдельных фронтов трещин, идущих от разных точек поверхности.

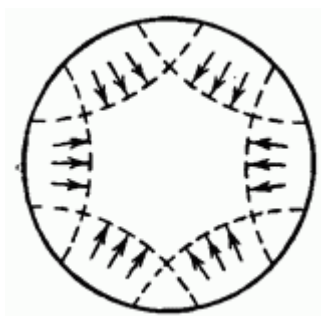


Рис. 12.2

Микроскопическое исследование показывает, что усталостная трещина, как правило, проходит сквозь тело кристаллического зерна; по границам зерен она может пройти только случайно, на некоторой части своего пути. Металлографические и рентгенографические исследования показывают, что циклические нагрузки не вызывают в металле каких-либо структурных изменений, но в отдельных кристаллических зернах наблюдается небольшая пластическая деформация, не отличающаяся принципиально от пластической деформации при статическом нагружении. Наличие пластических сдвигов в металле, подвергнутом действию переменных нагрузок, обнаруживается методами рентгенографии, а также визуально, при помощи оптического [микроскопа](#), когда напряжение и число циклов достаточно велики, и при помощи электронного микроскопа в начальной стадии сдвигообразования. По-видимому, незначительные пластические деформации в отдельных, наиболее неблагоприятно расположенных зернах существуют и при статических нагрузках тогда, когда напряжения значительно ниже предела текучести или предела упругости. Действительно, предел упругости всегда определяется условно и нахождение истинной границы, при которой появляются первые пластические деформации, практически невозможно.

При знакопеременных нагрузках группы «дислокаций в плоскостях скольжения движутся то в одном, то в другом направлении, при этом

повышается вероятность накопления значительного числа дислокаций на ограниченном участке. Если число дислокаций, собравшихся около препятствия, достаточно велико, в материале может возникнуть трещина. Накопление дислокаций около препятствия представляет собою локальное упрочнение материала, образование трещины снимает это упрочнение; при следующих циклах в той же плоскости скольжения сдвиг происходит беспрепятственно, новые дислокации как бы стекают в трещину, которая за счет этого растет.

Представление о местном упрочнении материала, способствующем появлению трещины, и о последующем «разрыхлении», сопровождающемся ее ростом, было развито Н. Н. Афанасьевым (1955 г.) без обращения к дислокационной модели.

На рис. 12.3. приведен график, заимствованный из работы Хантера и Фрике (1964 г.). Авторы подвергали знакопеременной нагрузке алюминиевые образцы и отмечали при каждом напряжении число циклов, которое соответствовало:

- 1) появлению первых следов скольжения в зернах;
- 2) появлению первой трещины, обнаруживаемой электронным микроскопом;
- 3) моменту, когда отдельные микротрещины начинают соединяться;
- 4) появлению первой видимой трещины;
- 5) разрушению.

Соответствующими цифрами отмечены кривые на графике. Напряжение отнесено к условному пределу выносливости, определенному для числа циклов, равного 10^7 .

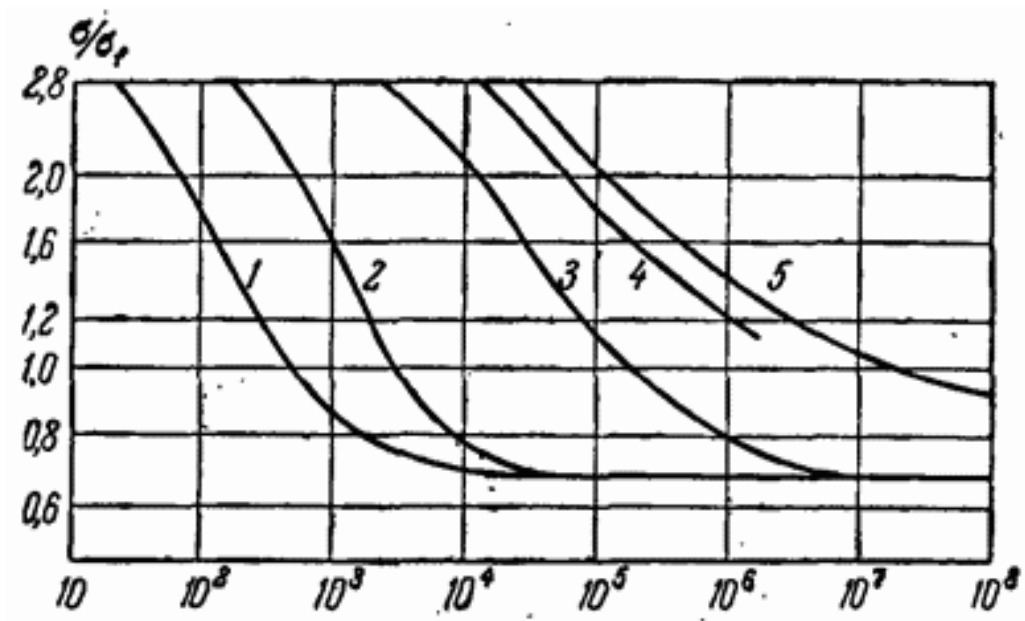


Рис. 12.3

Интересно отметить, что первые следы скольжения и первые трещины появляются очень рано, но развитие трещин идет чрезвычайно медленно. Даже при напряжениях меньших, чем предел выносливости, материал после нескольких тысяч циклов оказывается поврежденным.

МЕХАНИЗМ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

Механизм усталостного разрушения чрезвычайно сложен, и многие его детали остаются пока неясными. Согласно современным представлениям, усталостное разрушение непосредственно связано с неоднородностью строения материалов. Реальный металл состоит из большого числа весьма малых по размерам и связанных между собой кристаллов, между которыми имеются поры и неметаллические включения. Кристаллы, как правило, обладают анизотропией.

Кристаллические тела представляют собой конгломерат большого числа различно ориентированных кристаллов (зерен), и поэтому в достаточно больших объемах металлы проявляют свойства изотропии. Если же в ориентации зерен наблюдается упорядоченность, вызванная, например, прокаткой, протяжкой и т. п., то материал будет проявлять некоторую анизотропность.

При нагружении детали напряженность различных зерен будет различной, так как вследствие анизотропии свойств кристаллов и случайной ориентировки их кристаллографических осей жесткость каждого кристалла в направлении действия нагрузки будет отличаться от жесткости соседних кристаллов. Вычисляемые по формулам сопротивления материалов

напряжения являются лишь статистическим осреднением напряжений, действующих в различных зернах.

Неравномерность распределения усилий по зернам, расположенным в плоскости одного и того же сечения детали, легко представить себе, если вспомнить, что распределение усилий по элементам статически неопределимых систем при растяжении зависит от соотношений жесткостей этих элементов. Наглядная механическая модель для описания процесса накопления усталостных повреждений, предложенная В.В. Болотиным, представляет собой многократно статически неопределимую стержневую систему, состоящую из большого числа одинаковых по длине, но с различными сечениями и механическими свойствами стерженьков, подвешенных к неподвижной опоре и прикрепленных к абсолютно жесткому брусу (рис. 12.4). Случайные распределения механических свойств стерженьков позволяют моделировать случайную структуру поликристаллического материала.

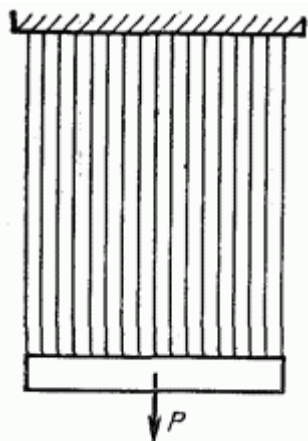


Рис. 12.4

Вначале, при нагружении детали, как и при нагружении стержневой системы, в ее наиболее слабых (наименее благоприятно ориентированных), как и в наиболее нагруженных зернах, появляются пластические деформации. На этом первом этапе деформирования материала основную роль играют дислокационные искажения кристаллической решетки; группы дислокаций, которые всегда имеют место в кристаллах, перемещаются при циклическом нагружении и постепенно концентрируются на каком-либо участке кристалла.

При повторных нагружениях пластические деформации от цикла к циклу накапливаются, и на определенной стадии циклического деформирования в отдельных зернах образуются линии скольжения.

Микроскопические и рентгеноскопические исследования показывают, что линии скольжения в отдельных зернах появляются уже на ранней стадии деформирования.

По мере развития линий скольжения в кристаллах начинается процесс упрочнения, связанный с блокировкой плоскостей скольжения. Аналогичное явление упрочнения после текучести наблюдается и при испытаниях на растяжение образцов из пластичных материалов.

Упрочнение отдельных кристаллов и их групп ведет к перераспределению напряжений между зернами.

Напряжения в упрочняющихся кристаллах повышаются, и, наконец, когда возможности к упрочнению кристалла исчерпываются, в нем образуются зародыши микротрещины по какой-либо плоскости скольжения. При последующих циклах нагружения размеры зародышей микротрещин увеличиваются, и происходит процесс разрыхления зерна, снижающий его способность сопротивления образованию трещины. Именно сочетание процессов упрочнения и разрыхления и ведет к образованию микротрещин в теле зерен.

Слияние возникших микротрещин создает благоприятные условия для появления и дальнейшего развития макротрещины, причем наличие начальных дефектов (пор, включений и т. п.) в материале ускоряет данный процесс.

На этом заканчивается первая (инкубационная) стадия усталостного разрушения. На первую стадию приходится от 60% до разрушающего числа циклов. На вторую стадию от начала образования первой макроскопической усталостной трещины и до окончательного разрушения приходится меньшая часть разрушающего числа циклов. График, показывающий зависимость длины усталостной трещины от числа циклов при отсутствии концентрации напряжений, представлен на рис. 12.5 кривой 1. На второй стадии развитие трещины быстро увеличивается и перед самым разрушением идет так же быстро, как и при статическом разрушении хрупких материалов.

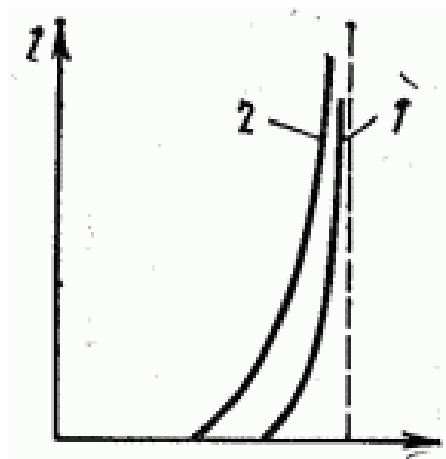


Рис. 12.5

При наличии концентрации напряжений усталостные трещины появляются уже после наработки образцами 45% от числа циклов до разрушения. Однако вначале они развиваются медленнее, чем при отсутствии концентрации напряжений, потому что быстро выходят из областей высоких напряжений, локализованных в окрестности источников концентрации напряжений. Но постепенно скорость роста трещин возрастает и образцы с концентрацией напряжений показывают меньшую усталостную прочность, чем без концентрации (рис. 12.5, кривая 2).

Если зарождение усталостной трещины обусловлено, главным образом, действием касательных напряжений, то ее развитие связано с действием нормальных напряжений и происходит по площадкам действия наибольших нормальных напряжений. Например, при переменном кручении трещина на поверхности вала возникает в плоскости действия τ_{\max} , а распространяется дальше по площадкам растягивающих σ_{\max} , наклоненным к оси вала под углом 45° (рис. 12.6).

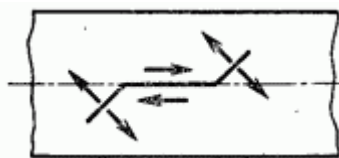


Рис. 12.6

Развитие трещины во второй стадии вызвано высокой концентрацией напряжений на ее фронте. Зачастую фронт усталостной трещины продвигается вперед отдельными скачками, свидетельством чему являются характерные бороздки на поверхности разрушения.

Образование зародышей усталостных трещин связано с накоплением значительных пластических деформаций, но только в микрообъемах, и именно поэтому усталостное разрушение происходит без заметной пластической деформации всей детали.

Законченной теории усталостного разрушения еще нет. В настоящее время интенсивно развиваются вероятностные методы расчетов на усталость, как более перспективные и эффективные. Одновременно продолжается процесс накопления экспериментальных фактов, на основе которых уточняются существующие и создаются новые расчетные методы.

Масштабный эффект

Если из одного и того же материала изготовить несколько отличающихся по диаметру партий образцов, то после испытания на усталость обнаруживается, что предел выносливости с увеличением диаметра уменьшается. Эта зависимость носит асимптотический характер. По виду кривой можно заключить, что для очень больших образцов, которые мы уже ни изготовить, ни испытать не можем, снижение предела выносливости с увеличением диаметра прекращается.

Снижение предела выносливости с увеличением размеров детали получило название масштабного эффекта. Этот эффект следует рассматривать как очевидное следствие того, что максимальное напряжение в образце, а тем более в детали, не характеризует полностью процесс усталостного разрушения, а предел выносливости, как уже указывалось, не выражает в чистом виде свойств материала. Статистический характер возникновения микротрещин тесно связан с неоднородностью напряженного состояния в пределах малых объемов, и геометрическое подобие, как критерий для оценки усталостного разрушения, потребовало бы геометрического подобия всех кристаллов в структуре и даже геометрического подобия их строения. Но эти условия при переходе от малого образца к большому не соблюдаются. Поэтому естественно, что не сохраняя полного геометрического подобия, мы не получаем и силового подобия.

Лекция 13. Основы статистической теории усталостного разрушения и примеры ее применения для исследований прочности. Оценка долговечности при различных гипотезах накопления усталостных повреждений

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ХАРАКТЕР ЯВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ

Усталостное разрушение и, особенно, его первая стадия носит ярко выраженный статистический характер, так как зависит от индивидуальных

особенностей поликристаллического строения каждого образца. Так, даже при самом строгом соблюдении однородности условий испытаний образцы из одного и того же материала при одинаковых максимальных напряжениях разрушаются, как показывают эксперименты, при существенно различных количествах циклов. Разброс разрушающих величин циклов может достигать при этом двух и более порядков. Величина разброса увеличивается с уменьшением уровня максимальных напряжений и соответствующим увеличением количества циклов, необходимых для разрушения образца.

В последние годы интенсивно развиваются вероятностные методы расчетов на прочность при напряжениях, переменных во времени. Эти методы основываются на вероятностной оценке рассеяния усталостных характеристик материала, определяемых путем испытания достаточно большой партии совершенно идентичных образцов на различных уровнях максимальных напряжений цикла.

Логарифмы разрушающих чисел циклов для всех образцов, испытанных на каждом уровне максимальных напряжений, располагаются в возрастающем порядке. Полученные таким образом [вариационные ряды](#)

$$(\lg N)_1 < (\lg N)_2 < (\lg N)_3 < \dots < (\lg N)_i < \dots < (\lg N)_n$$

служат исходной информацией для вероятностной оценки усталостных характеристик материала. [Вероятность](#) разрушения P , при данном на каждом уровне напряжений σ_{\max} , приблизительно равная отношению числа i образцов, разрушившихся при числе циклов, меньшем N к числу всех n образцов испытываемой партии, доведенных до разрушения на данном уровне σ_{\max} , вычисляется по формуле

$$P = \frac{i - 0,5}{n}. \quad (13.1)$$

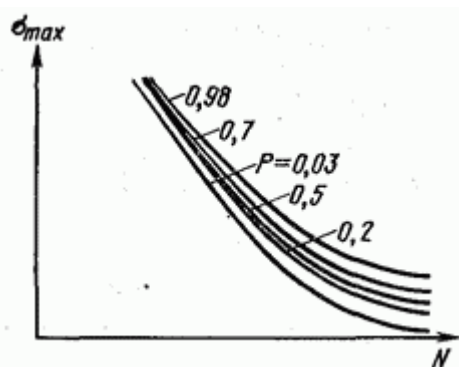


Рис. 13.1

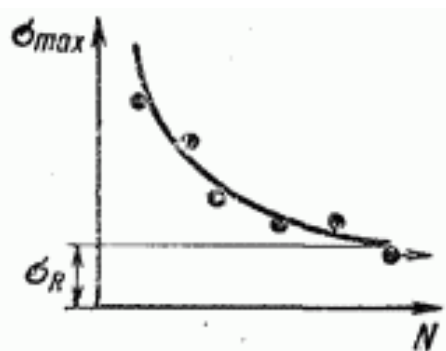


Рис. 13.2

Полученная таким образом зависимость между максимальными напряжениями σ_{\max} цикла, долговечностью N и вероятностью разрушения P представляется в виде семейства кривых усталости, построенных для различных вероятностей разрушения P (рис. 13.1). Кривая, построенная по средним значениям экспериментально найденных долговечностей N (см. рис. 13.2), соответствует напряжениям, вызывающим разрушения при заданном числе циклов с вероятностью, близкой к 0,5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ. ПРЕДЕЛ ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫНОСЛИВОСТИ

Предел выносливости материала определяется путем испытания идентичных образцов при различных значениях σ_{\max} (но при неизменном коэффициенте асимметрии R и регистрации количества циклов, при котором происходит разрушение каждого образца).

Для этой цели используется партия (не менее 10 образцов обычно круглого сечения). Во избежание концентрации напряжений образцам придается плавная форма, а поверхность тщательно шлифуется или полируется.

Предел выносливости зависит от размеров поперечного сечения образца. Поэтому всегда указывается, на образцах какого диаметра определялась эта усталостная характеристика.

Первый образец испытываемой партии нагружается так, чтобы максимальные напряжения превышали предел выносливости при данном коэффициенте асимметрии цикла, и по счетчику на машине устанавливается количество циклов, которое выдержал образец перед разрушением. Количество циклов, выдерживаемых образцом или деталью перед разрушением, называется **циклической долговечностью**.

В каждом последующем образце при том же коэффициенте асимметрии цикла создается максимальное напряжение, меньшее, чем в предыдущем, а также регистрируется число N циклов, при котором эти образцы разрушаются.

Результаты испытаний представляются графически в виде кривой усталости. По оси ординат откладывается σ_{\max} – **максимальное напряжение цикла, при котором испытывался образец**, а по оси абсцисс – число N циклов, которое выдержал образец перед разрушением.

Обычно на каждом уровне напряжений σ_{\max} испытывается несколько образцов, и по результатам испытаний определяется среднее значение разрушающего числа циклов. Именно это значение N и откладывается по оси абсцисс при построении кривых усталости. Вид кривой усталости для черных металлов приведен на рис. 13.3.

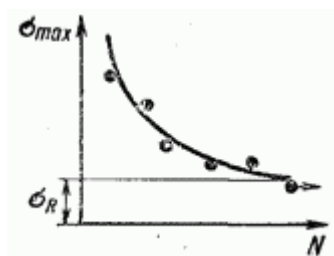


Рис. 13.3

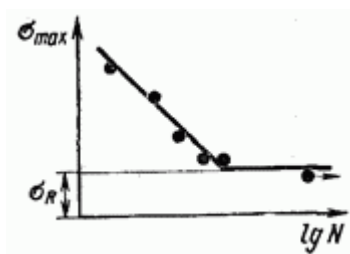


Рис. 13.4

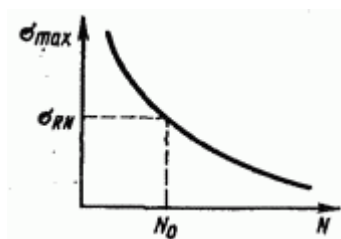


Рис. 13.5

Часто кривые усталости строят в полулогарифмических или двойных логарифмических координатах, откладывая по оси абсцисс логарифм числа циклов $\lg N$, соответствующих поломке образца, а по оси ординат — максимальное напряжение цикла σ_{\max} или σ_R . Кривая усталости в полулогарифмических координатах имеет вид, представленный на рис. 13.4. Она состоит из двух прямых, причем вторая прямая почти горизонтальна.

Эксперименты показывают, что образцы из большинства черных металлов, выдержавшие 10^7 циклов, обычно не разрушаются при дальнейшем увеличении числа перемен нагрузки. Кривая усталости для таких материалов асимптотически приближается к горизонтальной прямой. Отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат, определяет **предел выносливости**

материала σ_R при данном коэффициенте асимметрии цикла R (см. рис. 13.3).

Для цветных металлов, строго говоря, не существует такого числа циклов, выдержав которые образец не разрушается при дальнейшем испытании. Кривые усталости цветных металлов не имеют горизонтальной асимптоты (рис. 13.5). В таких случаях можно говорить лишь о **пределе ограниченной выносливости σ_{RN}**

Пределом ограниченной выносливости называется максимальное напряжение цикла, при котором материал выдерживает перед разрушением **наперед заданное число циклов N_0 , называемое базой испытания.**

Для сталей предел ограниченной выносливости, определенный на базе $N = 10^7$, как указывалось выше, можно принять за предел выносливости, так как если стальной образец выдержал 10^7 циклов, то он может выдержать практически неограниченное число циклов. Для цветных металлов за предел выносливости принимается ограниченный предел, определенный на базе от 10^6 до 10^8 циклов.

Наиболее простыми являются машины, предназначенные для испытаний на переменный изгиб с вращением при симметричном цикле изменения напряжений. Схема такой машины, в которой образец работает как консольная балка, представлена на рис. 13.6. Имеются также машины, в которых образец работает на переменный чистый изгиб как двухопорная балка.

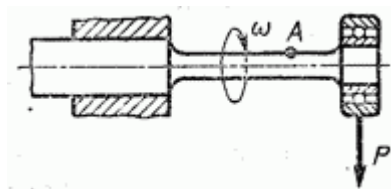


Рис. 13.6

При испытаниях на переменное растяжение (сжатие) и переменное кручение применяются машины более сложной конструкции. Обычно эти машины приспособлены для испытаний при асимметричном цикле.

Результаты экспериментальных исследований показали, что пределы выносливости одного и того же материала при растяжении и кручении меньше предела выносливости при изгибе. Например, при симметричном цикле предел выносливости при растяжении

$$(\sigma_{-1})_p = (0,7 \dots 0,8) \sigma_{-1},$$

а при кручении

$$\tau_{-1} = (0,4 \dots 0,7) \sigma_{-1},$$

где σ_{-1} предел выносливости при изгибе. В справочной литературе обычно приводятся значения σ_{-1} , полученные по результатам испытаний на переменный изгиб.

Были предприняты многочисленные исследования для установления связи предела выносливости σ_{-1} с другими механическими характеристиками материала. Эти исследования показали, что для сталей

$$\sigma_{-1} \approx 0,5\sigma_B,$$

а для цветных металлов зависимость менее определена:

$$\sigma_{-1} = (0,25 \dots 0,5) \sigma_B,$$

где σ_B – предел прочности материала.

Данные соотношения надо рассматривать как ориентировочные, но они показывают, что предел выносливости для некоторых цветных металлов почти в четыре раза меньше предела прочности,

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И ЧИСТОМ СДВИГЕ (ИЗГИБЕ, РАСТЯЖЕНИИ И КРУЧЕНИИ)

При переменных нагрузках обычно производится проверочный расчет на прочность, причем за основу для определения запаса прочности принимается схематизированная диаграмма предельных амплитуд σ_T от σ_m (см. рис. 13.7).

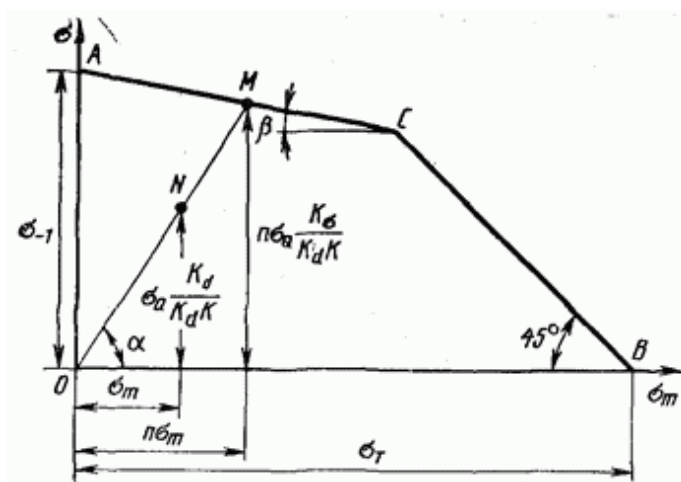


Рис. 13.7

Эта диаграмма построена по результатам испытания стандартных образцов без концентраторов напряжений и со шлифованной или полированной поверхностью. Поэтому при расчете должно быть дополнительно учтено влияние на сопротивление усталости детали всех указанных выше факторов. Влияние концентрации напряжений на сопротивление усталости учитывается эффективными коэффициентами K_σ , масштабный эффект – коэффициентом K_d , а состояние поверхности – коэффициентом K .

Так как концентрация напряжений, масштабный фактор и состояние поверхности мало сказываются на прочности деталей из пластического материала при постоянных напряжениях, принято эффект концентрации, состояния поверхности и масштабного фактора относить к переменной составляющей цикла σ_m .

Таким образом, если задан рабочий цикл в детали, характеризуемый **переменным напряжением σ_a** и **постоянным средним напряжением σ_t** , то цикл в стандартном образце, равнопрочном данной детали, будет определяться средним напряжением

$$(\sigma_m) = \sigma_m$$

и переменным напряжением

$$(\sigma_a) = \sigma_a \frac{K_\sigma}{K_d K}.$$

Предположим, что при возрастании нагрузок на деталь коэффициент асимметрии R не изменяется, т. е. циклы изменения напряжений в детали остаются подобными. Тогда эти напряжения в стандартном образце, определяемые выражениями выше, следует также пропорционально увеличивать; при увеличении нагрузок в n раз получим предельные значения $n\sigma_m$.

Значения σ_a определяются по диаграмме предельных напряжений (рис. 13.7) координатами точки M пересечения с ломаной ABC луча, проведенного из начала координат под углом α , тангенс которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\sigma_a)_{np}}{(\sigma_m)_{np}} = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \frac{K_\sigma}{K_d K}. \quad (13.2)$$

Запас прочности n_σ находится как отношение

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_m)_{np}}{\sigma_m}; \quad n_\sigma = \frac{(\sigma_a)_{np}}{\sigma_a}, \quad (13.3)$$

или графически как отношение отрезков (см. рис. 13.7):

$$n_{\sigma} = \frac{OM}{ON}. \quad (13.4)$$

Нетрудно также получить аналитические выражения для запаса прочности, причем таких выражений будет два, так как луч OM может пересечь как прямую AC, так и прямую BC.

Уравнение прямой AC можно записать как уравнение прямой с угловым коэффициентом ψ (см. рис. 13.7)

$$(\sigma_a)_{пр} = -\psi (\sigma_m)_{пр} + \sigma_{-1}, \quad (13.5)$$

где

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\sigma_{-1} - \frac{\sigma_0}{2}}{\frac{\sigma_0}{2}} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \\ (\sigma_a)_{пр} &= n_{\sigma} \sigma_a \frac{K_{\sigma}}{K_d K}; \\ (\sigma_m)_{пр} &= n_{\sigma} \sigma_m. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Отсюда, после несложных преобразований находим выражение для n_{σ} :

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_{\sigma}}{K_d K} + \psi \sigma_m}. \quad (13.7)$$

Уравнение прямой BC

$$(\sigma_a)_{пр} + (\sigma_m)_{пр} = \sigma_T. \quad (13.8)$$

Следовательно, для второго участка диаграммы

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a \frac{K_{\sigma}}{K_d K} + \sigma_m}. \quad (13.9)$$

Из двух значений n_{σ} , определяемых этими формулами, искомым запасом прочности будет меньшее значение.

В случае кручения запас прочности n_{τ} определяется аналогично; расчетные формулы получатся путем замены во всех предыдущих выражениях σ на τ и K_{σ} на K_{τ} .

Тема 4: Основы теории надежности. Приложение ее к вопросам прочности

Лекция 14. Основные понятия. Надежность, мера надежности, долговечность и нормативный ресурс

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Надежностью называют свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.

Отказом называется событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта.

Отказы следует **отличать от неисправных состояний**, при которых изделие не соответствует хотя бы одному из требований технических условий, но сохраняет свою работоспособность.

Катастрофические отказы – разрушение конструкции, взрывы и т. п., создающие опасность для жизни людей или влекущие большой материальный ущерб, должны быть исключены с помощью специальных испытаний.

Они не входят в систему количественных оценок теории надежности.

Долговечностью называют свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Ресурсом называется суммарная наработка объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние. **Назначенным ресурсом (нормативным)** называется суммарная наработка, при достижении которой эксплуатация объекта должна быть прекращена независимо от его технического состояния.

Прекращение эксплуатации связано с требованиями безопасности или экономической целесообразности.

В пределах назначенного (общетехнического) ресурса обычно предусматривается один или несколько ремонтов.

Ремонтопригодностью называется свойство объекта, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем технического обслуживания и ремонта.

Контролеспособностью называется свойство изделия допускать контроль его состояния в процессе эксплуатации. Контроль осуществляется при помощи датчиков оборотов, температур, вибраций и т. д., а также путем визуальных осмотров с применением оптических и других приборов.

ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ, ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ

Время появления отказа t^* рассматривают как случайную величину.

Вероятность безотказной работы за время t

$$P(t) = \text{Вер}(t^* > t). \quad (14.1)$$

Символ Вер означает вероятность.

Пусть в начальный момент времени работает N_0 изделий. Если к моменту времени наработки t_i исправными оказались $N_{\text{и}}(t_i)$, а неисправными $N^*(t_i)$ изделий, то статистическая оценка вероятности безотказной работы

$$P(t_i) = \frac{N_{\text{и}}(t_i)}{N_0} = 1 - \frac{N^*(t_i)}{N_0}. \quad (14.2)$$

Для простоты допустим, что число изделий настолько велико, что статистическая оценка близка к истинной вероятности. Пусть за время работы

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (14.3)$$

число отказавших изделий увеличилось на

$$\Delta N_i^* = N^*(t_{i+1}) - N^*(t_i). \quad (14.4)$$

Вероятность отказа изделия за время Δt_i

$$\begin{aligned} \text{Вер}(t_i < t^* < t_{i+1}) &= \\ &= \frac{N^*(t_{i+1}) - N^*(t_i)}{N_0} = \frac{\Delta N^*(t_i)}{N_0}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Если отнести вероятность отказа в промежутке Δt_i к самому промежутку, то получим плотность распределения отказов

$$f(t_i) \approx \frac{\Delta N^*(t_i)}{N_0 \Delta t_i}. \quad (14.6)$$

Более точно плотность распределения отказов в момент t

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N^*(t)}{N_0 \Delta t} = \frac{1}{N_0} \frac{dN^*}{dt}. \quad (14.7)$$

Плотность (частота) отказов (плотность вероятности отказов) представляет собой число отказов в единицу времени (скорость выбывания), отнесенное к первоначальному числу изделий. Если $F(t)$ функция распределения случайной величины t^* , то

$$F(t) = \text{Вер}(t^* < t) = 1 - P(t). \quad (14.8)$$

Функция распределения связана с плотностью вероятности отказов

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \int_0^t f(t) dt, \quad (14.9)$$

так как время до появления отказа — величина положительная. Из последнего соотношения следует:

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = - \frac{dP}{dt}. \quad (14.10)$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ представляет собой число отказов в единицу времени, отнесенное не к первоначальному числу изделий, а к числу изделий, находящихся в эксплуатации в данный момент:

$$\lambda(t_i) \approx \frac{1}{N_n(t_i)} \frac{\Delta N^*(t_i)}{\Delta t_i}. \quad (14.11)$$

Если учесть, что (по смыслу)

$$N_n(t_i) \Delta t_i = \Delta t_{i\Sigma} \quad (14.12)$$

это суммарная наработка всех изделий за время Δt_i , то интенсивность отказов равна числу отказов в данном интервале времени, отнесенному к общей наработке изделий в этом же промежутке времени:

$$\lambda(t_i) \approx \frac{\Delta N^*(t_i)}{\Delta t_{i\Sigma}}. \quad (14.13)$$

Более точно интенсивность отказов в момент времени t

$$\lambda(t) = \frac{1}{N_n(t)} \frac{dN^*}{dt}. \quad (14.14)$$

Интенсивность отказов характеризует плотность [вероятности](#) отказов в ближайший промежуток времени, если до его начала отказ еще не произошел.

Интенсивность отказов и плотность вероятности отказов связаны соотношением

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \quad (14.15)$$

Равенство $\lambda(t)$ можно записать в виде:

$$\lambda(t) = \frac{N_0}{N_n(t)} \frac{dN^*}{N_0 dt}, \quad (14.16)$$

если учесть формулу $f(t)$ (14.7) и $P(t)$ (14.2).

Пример. В эксплуатацию с ресурсом 300 часов выпущена партия из 500 объектов. Число снятых объектов после различной выработки характеризуется следующими данными:

Время на- работки, ч. . .	50	100	150	200	250	300
Общее число снятых объектов . . .	20	24	30	34	40	50

Определить плотность вероятности и интенсивность отказов в период времени от 0 до 50 и от 200 до 250 и [вероятность](#) безотказной [работы](#) за ресурс.

Решение. За первый период снято 20 объектов и плотность вероятности отказов (для середины интервала 25 ч).

$$f(25) = \frac{20}{500 \cdot 50} \approx 0,80 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч};$$

интенсивность отказов (среднее число работающих объектов 490)

$$\lambda(25) = \frac{20}{490 \cdot 50} = 0,82 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

За период от 200 до 250 снято 6 объектов.

Плотность вероятности отказов

$$f(225) = \frac{6}{500 \cdot 50} = 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

Среднее число работавших объектов $500 - 1/2(34+40) = 463$.

Интенсивность отказов

$$\lambda(225) = \frac{6}{463 \cdot 50} = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

Вероятность безотказной работы за ресурс

$$P(300) = 1 - \frac{50}{500} = 0,9.$$

Среднее время безотказной работы.

Если $f(t)$ – плотность вероятности отказов, то среднее время безотказной работы

$$T_{cp} = \bar{t} = \int_0^{\infty} t f(t) dt.$$

Интегрированием по частям находим и другую эквивалентную формулу

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P(t) dt.$$

(14.17)

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Это уравнение связывает [вероятность](#) безотказной [работы](#) с **интенсивностью отказов**.

Из уравнений (14.10) и (14.15) получаем

$$\lambda(t) = - \frac{dP}{P(t) dt} \quad (14.18)$$

или

$$\frac{dP}{P(t)} = -\lambda(t) dt. \quad (14.19)$$

Интегрируя обе части равенства от 0 до t, находим

$$\begin{aligned} \ln P(t) \Big|_0^t &= \ln P(t) - \ln P(0) = \\ &= - \int_0^t \lambda(t) dt. \end{aligned} \quad (14.20)$$

Предполагая, что в начальный момент времени $t = 0$ изделие находится в исправном состоянии

$$P(0) = 1,$$

получаем из равенства (14.20)

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{- \int_0^t \lambda(t) dt} = \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (14.21)$$

Уравнение (14.21) является **основным уравнением теории надежности**, так как позволяет по протеканию интенсивности отказов определять [вероятность](#) безотказной [работы](#).

Лекция 15. Задачи теории надежности. Определение надежности системы по надежности ее элементов

ОБЩАЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ ПО ВРЕМЕНИ НАРАБОТКИ

Практически установлено, что изменение интенсивности отказов по времени для большинства сложных систем (машин, узлов) носит характер кривой, показанной на рис. 15.1. Период приработки I характеризуется повышенным значением интенсивности отказов; при нормальной эксплуатации II интенсивность отказов уменьшается и изменяется сравнительно мало, отказы носят внезапный, случайный характер. В периоде усиленного изнашивания III интенсивность отказов снова резко возрастает. Поэтому перед эксплуатацией сложной системы целесообразно проводить кратковременные сдаточные испытания, отсеивающие дефекты приработки. Система, удовлетворительно прошедшая начальный период, более надежна, чем система, находящаяся в начальном периоде. Замена старых узлов (деталей) новыми целесообразна только в период III. При профилактической замене деталей на новые в периоде II надежность конструкции не возрастает, а уменьшается. Ресурс изделия следует назначать в начале третьего периода (периода изнашивания и старения).

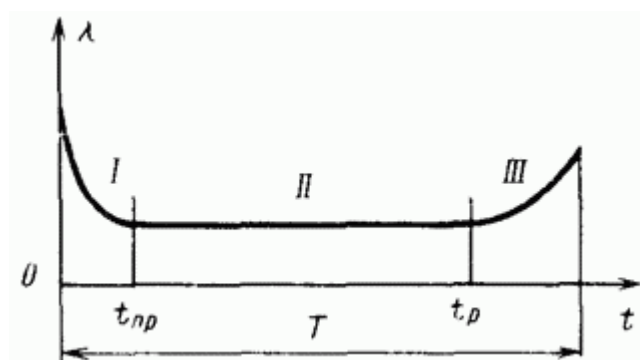


Рис. 15.1. Зависимость интенсивности отказов от времени наработки

ПРОГНОЗИРУЕМАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Пусть известно, что система проработала без отказа время t . Какова вероятность безотказной работы в следующий период τ .

Если случайная величина – время работы до отказа t^* , то

$$\begin{aligned} P(\tau, t) &= \text{Вер}(t^* - t > \tau) = \\ &= \frac{P(t + \tau)}{P(t)}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

$P(t)$ можно рассматривать как начальную (априорную) прогнозируемую вероятность непрерывной работы системы, которая была исправна в начальный момент времени $t = 0$.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН НАДЕЖНОСТИ

Основной период эксплуатации обычно характеризуется почти постоянной интенсивностью отказов. В этом периоде отказы происходят от случайных факторов (попадание посторонних предметов, неблагоприятное сочетание внешних факторов, усталостные разрушения и др.) и носят внезапный характер. Время появления отказа не связано с предыдущей наработкой изделия.

При экспоненциальном законе надежности предполагается, что интенсивность отказов является величиной постоянной (рис. 15.2):

$$\lambda(t) = \lambda. \quad (15.2)$$

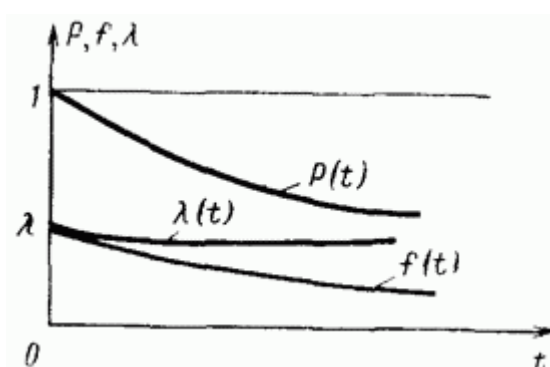


Рис. 15.2. Экспоненциальное распределение времени безотказной работы

Вероятность безотказной работы по уравнению (14.21)

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (15.3)$$

Плотность распределения отказов

$$f(t) = -\frac{dP}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (15.4)$$

Среднее время безотказной работы

$$T_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (15.5)$$

Вероятность безотказной работы можно теперь записать в такой форме:

$$P(t) = e^{-\frac{t}{T_{\text{ср}}}}. \quad (15.6)$$

Экспоненциальный закон распределения справедлив для описания потока отказов с постоянной интенсивностью.

Понятие потока отказов вводится для восстанавливаемых в процессе эксплуатации изделий.

Для потока отказов величина $T_{\text{ср}}$ представляет собой среднюю наработку на один отказ.

Важным свойством экспоненциального закона надежности является то, что он относится к «нестареющим» системам. Для такого закона (**и только для него!**) прогнозируемая вероятность безотказной работы не зависит от предыдущей наработки

$$\begin{aligned} P(\tau, t) &= \frac{P(t + \tau)}{P(t)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(t + \tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Пример 1. Изделие имеет ресурс 1000 ч и интенсивность отказов $\lambda = 0,1 \cdot 10^{-3}$ 1/ч (среднее время наработки на отказ $T_{\text{ср}} = 10\,000$ ч.). Определить вероятность безотказной работы первые 10ч и за весь ресурс, считая справедливым экспоненциальный закон надежности.

Решение. Вероятность безотказной работы за первые 10 ч работы

$$P(10) = e^{-0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10} \approx 0,999;$$

за весь ресурс

$$P(1000) = e^{-0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3} = 0,90,$$

но если известно, что изделие отработало исправно 990 часов, то вероятность отсутствия отказов за последние 10 ч снова будет 0,999.

Рассмотрим определение интенсивности отказов (или средней [наработки на отказ](#)) при экспоненциальном распределении. Если известно, что для каждого из n испытуемых изделий [время работы](#) до отказа составило t_i^* , то следует принять

$$T = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^* \quad (15.8)$$

Однако на практике информация о работоспособности изделий относится к определенному времени эксплуатации, в течение которого часть изделий получила отказы, а остальные отработали его исправно. Тогда следует принять для данного времени испытаний

$$T = \frac{t_{\Sigma}}{K} = \frac{\text{Суммарная наработка всех изделий}}{\text{Общее число отказов}} \quad (15.9)$$

Пример 2. Определить среднюю наработку до отказа для экспоненциального закона надежности, если за время эксплуатации имеются следующие данные: 30 изделий отработали исправно 3000 ч, 10 изделий по 1000 ч, 7 изделий по 1500 ч; сняты три изделия после наработки соответственно 500, 2000 и 2500 ч.

Решение. Суммарное время наработки

$$t_{\Sigma} = 30 \cdot 3000 + 10 \cdot 1000 + 7 \cdot 1500 + 500 + 2000 + 2500 = 115,5 \times 10^3 \text{ ч.} \quad (15.10)$$

Средняя [наработка на отказ](#)

$$T = \frac{t_{\Sigma}}{K} = \frac{115,5 \cdot 10^3}{3} = 38,5 \cdot 10^3 \text{ ч.} \quad (15.11)$$

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Нормальное распределение применяют в теории надежности для описания отказов, вызванных изнашиванием детали.

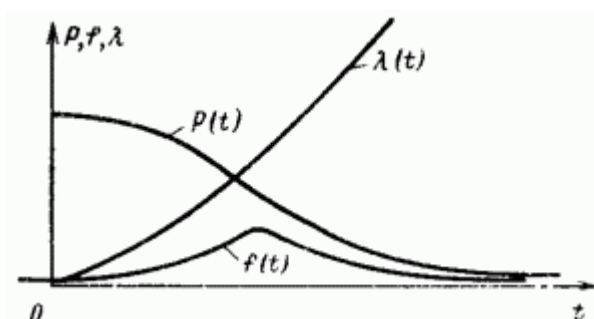


Рис. 15.3. Нормальное распределение времени безотказной работы

Плотность распределения времени безотказной работы при нормальном законе распределения (рис. 15. 3)

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}}, \quad (15.12)$$

где параметры распределения \bar{t} и σ_t — среднее значение времени и среднее квадратическое отклонение.

При нормальном распределении время t может быть отрицательным, что противоречит физическому смыслу. Однако, если среднее время \bar{t} значительно превышает σ_t ($\bar{t} > 3\sigma_t$), отрицательная часть распределения не имеет практического значения.

Функция распределения

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t}\right), \quad (15.13)$$

где Φ — функция Лапласа.

Вероятность безотказной работы при нормальном законе распределения

$$P(t) = 1 - F(t) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t}\right). \quad (15.14)$$

Приведем еще значение интенсивности отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}}{\sigma_t \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t}\right) \right]} \quad (15.15)$$

При больших $t(t > \text{среднего} + 2\sigma_t)$ величина

$$\lambda(t) \approx \frac{t - \bar{t}}{\sigma_t^2} \quad (15.16)$$

При $t \rightarrow \infty \quad f(t) \rightarrow 0, \lambda(t) \rightarrow \infty.$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА ДЛЯ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Это распределение используют для статистических моделей надежности в первый период эксплуатации («приработочные» отказы). [Функцию распределения](#) принимают в виде ($t > 0$)

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t^m} \quad (15.17)$$

Закон Вейбулла имеет два положительных параметра: λ и m . Экспоненциальное распределение является частным случаем [распределения Вейбулла](#) при $m = 1$. Особенно просто по закону Вейбулла выражается [вероятность](#) безотказной [работы](#) :

$$P(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t^m} \quad (15.18)$$

[Плотность распределения](#) (рис. 15. 4)

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = \lambda m t^{m-1} e^{-\lambda t^m} \quad (15.19)$$

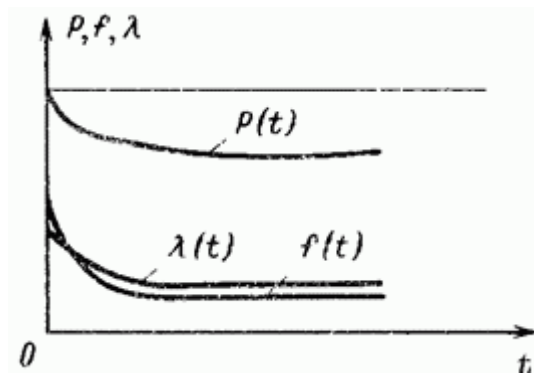


Рис. 15.4. Распределение Вейбулла времени безотказной работы ($m < 1$)

Интенсивность распределения отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \lambda m t^{m-1}. \quad (15.20)$$

Если $0 < m < 1$, то интенсивность отказов со временем убывает.

Лекция 16. Надежность последовательного, параллельного и смешанного соединения элементов

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Если система включает несколько элементов, причем отказ одного из них приводит к отказу всей системы в целом, то такое соединение элементов называют последовательным (рис. 16. 1).

Например, узлы двигателя – 1, компрессор – 2 и турбину – 3 можно считать соединенными последовательно, так как отказ одного из этих узлов приводит к отказу всего двигателя. В строительной механике примером может быть расчетная схема статически определимой системы. Отказ одного из элементов превращает систему в механизм.

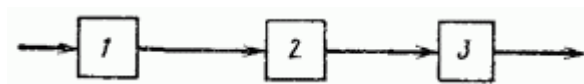


Рис.16.1. Система с последовательными элементами

Предполагая отказы отдельных элементов независимыми, получим вероятность безотказной работы системы из n последовательных элементов

$$P(t) = P_1(t) P_2(t) \dots P_n(t). \quad (16.1)$$

При последовательном включении элементов вероятность безотказной работы уменьшается. Например, если для одного элемента $P_1 = 0,99$, то для 10 последовательно соединенных подобных элементов

$$P = P_1^n = 0,99^{10} = 0,90.$$

Важное свойство системы с последовательными элементами состоит в следующем, Если $\lambda_i(t)$ — интенсивность отказов i -го элемента, то для всей системы

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda_{\Sigma}(t) dt}, \quad (16.2)$$

где

$$\lambda_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (16.3)$$

При последовательном соединении элементов интенсивности отказов суммируются.

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В этом случае (рис. 16.2) отказ системы наступает только тогда, когда отказали все без исключения элементы. В строительной механике примером может быть расчетная схема статически неопределимой системы (если отказом считать момент разрушения системы).

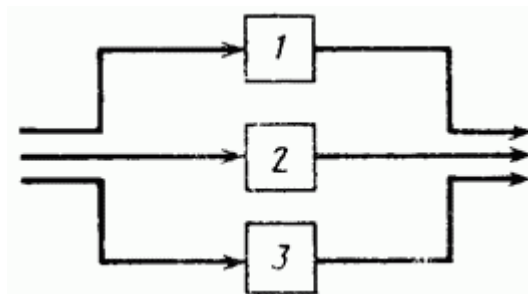


Рис.16.2. Система с параллельными элементами

Вероятность отказа

$$F(t) = 1 - P(t). \quad (16.4)$$

Если $F_i(t)$ — вероятность отказа i -го элемента, то

$$F(t) = F_1(t) F_2(t) \dots F_n(t). \quad (16.5)$$

Вероятность безотказной работы системы

$$P(t) = 1 - (1 - P_1(t)) (1 - P_2(t)) \dots (1 - P_n(t)). \quad (16.6)$$

Если вероятность безотказной работы элементов одинакова и равна $P_1(t)$, то

$$P(t) = 1 - (1 - P_1(t))^n. \quad (16.7)$$

Из этого равенства можно получить $P_1(t)$, если задано $P(t)$:

$$P_1(t) = 1 - \sqrt[n]{1 - P(t)}. \quad (16.8)$$

Пример.

Определить необходимую вероятность безотказной работы элемента, если система из трех параллельных элементов должна иметь вероятность безотказной работы (за время t) $P(t) = 0.999$.

Решение. Из уравнения (16.8) находим

$$P_1(t) = 1 - \sqrt[3]{1 - 0.999} = 0.90.$$

Из равенства (16.7) и (16.8) можно сделать вывод, что надежность системы с параллельными элементами значительно выше надежности отдельного элемента.

Параллельное соединение — метод создания надежной системы из «ненадежных» элементов.

Систему, содержащую параллельно работающие элементы, называют системой с резервированием.

Применяют три метода резервирования:

- 1) система с нагруженным («горячим») резервом;
- 2) система с облегченным резервом;
- 3) система с ненагруженным («холодным») резервом.

В первом случае резервный элемент работает в одинаковых условиях с основным (например, многодвигательный самолет).

Во втором случае резервный элемент работает в облегченных условиях, в третьем случае он включается в [работу](#) только после отказа основного элемента.

Целесообразность применения различных схем резервирования зависит от особенностей системы, назначения элементов и других факторов. Например, если для включения элемента на заданную мощность требуется значительное время, то возможности использования «холодного» резерва становятся ограниченными.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Существуют различные показатели надежности, многие из которых включаются в стандарты и технические условия.

Выбор нормируемых показателей надежности и их регламентация связаны с назначением изделия, режимом его использования, последствиями отказов и другими факторами.

В качестве основных показателей надежности обычно используют следующие: [вероятность](#) безотказной [работы](#) $P(t)$ и [наработку на отказ](#) T . (Для невозстанавливаемой статически определимой системы используют термин «среднее время безотказной [работы](#) », определяемое как математическое ожидание времени от момента начала [работы](#) до момента возникновения отказа.)

Для ремонтируемых (восстанавливаемых) статически неопределимых систем величина T представляет среднюю наработку между отказами. Она определяется в рассматриваемом интервале времени

$$T = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

(16.9)

где N – число изделий в статистической совокупности (выборке); t_i и m_i – наработка и число отказов i – го изделия в рассматриваемом интервале времени.

Для отказов, не устраняемых в эксплуатации, в качестве показателя надежности используют среднюю наработку до первого отказа T_{cp} . Среднюю наработку до отказа определяют отдельно для отказов различных типов. Например, для пассажирских авиационных двигателей средняя наработка до отказа в полете составляет обычно

$$T_{o. п} \approx (2 \div 8) 10^4 \text{ л/ч},$$

тогда как средняя наработка на один досрочно снятый двигатель

$$T_{дс. д} = (1 \div 6) 10^3 \text{ л/ч}.$$

Указанные характеристики отражают различные характеристики эксплуатации; величина $T_{дс. д}$ является, в сущности, экономическим показателем.

Практика эксплуатации технических систем показывает, что их надежность по мере увеличения общей наработки парка изделий в эксплуатации возрастает. Это происходит в результате внесения конструктивных и технологических изменений в производство изделий, направленных на устранение отказов. При очень большой наработке (или времени эксплуатации) наступает «старение» парка изделий и наблюдается стабилизация, а затем и понижение уровня надежности.

Задачи теории надежности в приложении ее к вопросам прочности сооружений

ЗАПАСЫ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ РАБОТЕ НА РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ

Элементы сооружений работают, как правило, на нескольких различных режимах, отличающихся напряжениями, длительностью (или числом циклов), а также температурными условиями. В этом случае для оценки работоспособности детали используют представление об эквивалентных режимах и эквивалентных запасах прочности (эквивалентных напряжениях, длительностях, числе циклов).

Эквивалентный запас длительной прочности. Разрушение детали под действием постоянных напряжений за некоторое время t_p является результатом постепенного накопления в материале необратимых изменений в виде микротрещин и других повреждений. При оценке степени повреждения

Π условно считают, что для исходного (неповрежденного) материала $\Pi = 0$ для момента разрушения $\Pi = 1$.

Если время работы на некотором режиме при $\sigma_i = \text{const}$ равно t_i , а разрушение наступает за время t_{pi} , то в первом приближении степень повреждения Π_i считают равной **относительной продолжительности работы** на этом режиме:

$$\Pi_i = \frac{t_i}{t_{pi}} = \frac{1}{n_{ti}}, \quad (16.10)$$

где n_{ti} — запас по долговечности на i – м режиме.

При работе на нескольких режимах принимается **линейное суммирование повреждений**

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_k = \\ &= \sum_{i=1}^k \Pi_i = \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{t_{pi}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_{ti}}, \end{aligned} \quad * \quad (16.11)$$

где k — общее число режимов.

Два режима считают эквивалентными по опасности разрушения, если их степени повреждения одинаковы. Поэтому ту же степень повреждения Π можно получить при работе на одном (эквивалентном) режиме, если

$$\Pi_{\text{экв}} = \Pi.$$

Для эквивалентного режима

$$\Pi_{\text{экв}} = \frac{t_{\text{экв}}}{t_{p \text{ экв}}} = \frac{1}{n_{t \text{ экв}}}, \quad (16.12)$$

и из (16.12) следует формула для эквивалентного запаса по долговечности

$$\frac{1}{n_{t \text{ экв}}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_{ti}}. \quad (16.13)$$

При степенной зависимости (m_i) предела длительной прочности от времени ($\sigma_{дл}$) запас по долговечности $n_{ti} = t_{pi} / t_i$ связан с запасом длительной прочности на том же режиме $n_i = \sigma_{дл i} / \sigma_i$ соотношением

$$n_{t_i} = \frac{t_{pi}}{t_i} = \left(\frac{\sigma_{дл i}}{\sigma_i} \right)^{m_i} = n_i^{m_i}. \quad (16.14)$$

Подставив (16.14) в формулу (16.13) и учитывая, что для эквивалентного режима $n_{тэкв}$ равно $n_{экв}$ в степени $m_{экв}$, получаем

$$\frac{1}{n_{экв}} = \sqrt[m_{экв}]{\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n_i} \right)^{m_i}} \quad (16.15)$$

Обычно в качестве эквивалентного выбирают самый тяжелый режим ($i = 1$) для которого собственный запас длительной прочности имеет минимальное значение $n_1 = n_{min}$. Для жаропрочных сплавов при температурах выше 500 – 600 обычно $m_{экв} = 4 - 8$.

Эквивалентное время работы. Для сокращения времени испытаний можно привести все режимы к наиболее тяжелому, увеличив время работы на этом режиме с t_1 до $t_{экв}$ и используя соотношение

$$t_{экв} = \frac{t_p(T_1, \sigma_1)}{n_{t_{экв}}}. \quad (16.16)$$

С учетом выражений (16.13) и (16.14)

$$t_{экв} = t_1 \left[1 + \sum_{i=2}^k \frac{n_1^{m_1}}{n_i^{m_i}} \right], \quad (16.17)$$

где n_1 – запас прочности на наиболее тяжелом режиме.

Величина $t_{экв}$ всегда меньше суммарного времени работы на всех режимах $t_{\Sigma} = \sum t_i$ ($i = 1-k$).

По формулам (16.17) можно определить время, необходимое для проведения сокращенных эквивалентных испытаний детали на длительную прочность, обеспечивающих за время $t_{экв}$ ту же повреждаемость по

длительной прочности, что и при испытаниях по полной программе за время t_{Σ} .

ЗАПАСЫ ВЫНОСЛИВОСТИ ПРИ РАБОТЕ НА РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ

Для материалов, не имеющих предела выносливости, а также для режимов ограниченной длительности с напряжениями выше предела выносливости, в том числе при малоцикловой усталости, зависимость разрушающих амплитуд с учетом концентрации напряжений $\sigma_{ар}$ от числа циклов N до разрушения имеет в логарифмических координатах вид [прямой линии](#):

$$\sigma_{ар}^m N = C = \text{const.} \quad (16.18)$$

Поэтому для симметричных циклов расчеты эквивалентного запаса предела выносливости, эквивалентных переменных напряжений, эквивалентной циклической долговечности можно проводить по формулам предыдущего пункта, заменив в них действующие напряжения σ_i на амплитуды σ_{ai} , время t_i — на число циклов N_i , предел длительной прочности $\sigma_{длi}$ — на ограниченный предел выносливости $\sigma_{арi}$ и используя соответствующие значения постоянных m и C .

Экспериментальное определение.

Наиболее точным способом определения предела выносливости детали является экспериментальное исследование в условиях, наиболее полно имитирующих реальные условия [работы](#). Испытания проводят с помощью универсальных или специальных машин для испытания на усталость.

Среди универсальных машин большое распространение получили электродинамические [возбудители](#) вибраций, позволяющие создать переменные напряжения с частотой от 50 до 10 000 Гц. Для определения предела выносливости испытывают 6 – 20 образцов. При необходимости получения [статистических оценок](#) число испытываемых деталей увеличивают до нескольких десятков.

Однако экспериментальное исследование натуральных элементов (крупногабаритных деталей и других изделий, изготавливаемых в небольшом количестве) не всегда возможно и целесообразно.

В таких случаях проводят испытания образцов, имитирующих напряженное состояние в опасных зонах детали с наибольшим приближением

по источникам концентрации напряжений, абсолютным размерам, технологии, покрытиям, температуре, среде и т. п.

Расчетно-экспериментальное определение. Расчет пределов выносливости основывается на системе экспериментальных данных, полученных с помощью испытания образцов.

Экспериментальные исследования показали, что усталость элементов сооружений имеет статистическую природу, т. е. зависит от целого ряда факторов, значение которых предварительно учесть практически невозможно (состояние поверхности, наличие внутренних дефектов структуры и т. п.). В связи с этим наблюдается значительное рассеяние результатов испытаний, особенно по усталостной долговечности. Образцы, изготовленные по одинаковой технической документации, обнаруживают при испытаниях на одном уровне нагружения числа циклов до разрушения, отличающиеся в несколько раз.

Для описания долговечности детали при переменных нагрузках наиболее употребительным является логарифмически **нормальный закон** (нормальный закон логарифма [случайной величины](#)). [Плотность распределения](#) логарифма числа циклов до усталостного разрушения при [работе](#) на постоянном уровне переменных напряжений σ

$$f(\lg N) = \frac{1}{S_{\lg N} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg N - \overline{\lg N})^2}{2S_{\lg N}^2}}, \quad (16.19)$$

где в числителе и в знаменателе степени e соответственно параметры распределения: дисперсия и среднее квадратическое отклонение (стандарт) логарифма числа циклов до разрушения.

Параметры распределения: М.О. и стандарт зависят от действующих переменных напряжений:

$$\overline{\lg N} = F_1(\sigma), \quad S_{\lg N} = F_2(\sigma). \quad (16.20)$$

При малом уровне действующих напряжений наблюдается отклонение от логарифмически нормального закона в области малых долговечностей.

Удовлетворительное статистическое описание можно получить с помощью введения порогового значения для числа циклов N_n . Предполагается, что разрушение возможно при $N \gg N_n$. Тогда [плотность распределения](#) выражается равенством

$$f(\lg(N - N_n)) = \frac{1}{S_{\lg(N - N_n)} \sqrt{2\pi}} \times \exp \left(- \frac{[\lg(N - N_n) - \overline{\lg(N - N_n)}]^2}{2S_{\lg(N - N_n)}^2} \right). \quad (16.21)$$

Такое распределение содержит три параметра:

$$\overline{\lg(N - N_n)}; S_{\lg(N - N_n)} \text{ и } N_n. \quad (16.22)$$

Рассеяние пределов выносливости при фиксированном числе циклов значительно меньше, чем рассеяние долговечностей. Приближенно можно считать

$$S_{\lg \sigma} \approx \frac{1}{m} S_{\lg N}. \quad (16.23)$$

Более полные сведения о статистических моделях усталости содержатся в **работах** [8, 9].

Лекция 17. Другие задачи теории надежности в приложении ее к вопросам прочности сооружений как системы связанных элементов.

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ И ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ

Оценка прочностной надежности проводится с помощью допускаемых напряжений, запасов прочности и [вероятности](#) разрушения. При использовании допускаемых напряжений условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (17.1)$$

где σ_{\max} — наибольшее напряжение в элементе, $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

Такая оценка весьма удобна, если на практике для однотипных конструктивных элементов, стабильных условий нагружения, устоявшейся технологии, производства разработана система допускаемых напряжений.

Однако оценке прочностной надежности с помощью допускаемых напряжений присущи и существенные недостатки. Величина $[\sigma]$ не дает в явном виде представления о степени надежности, так как в формуле не показано соотношение действующих и предельных напряжений. Величина допускаемого напряжения носит условный характер, так как не отражает

характера предполагаемого разрушения (статического, усталостного и т. п.), режима нагружения и других факторов, влияющих на надежность. Допускаемое напряжение, особенно при действии переменных нагрузок, в значительной степени зависит от [геометрии](#) детали, концентрации напряжений, материала и технологии изготовления, что затрудняет ее применение в качестве нормативной характеристики.

В современных инженерных расчетах допускаемые напряжения используют главным образом для приближенных, предварительных расчетов. Наибольшее распространение получил расчет по запасам прочности.

Условие прочностной надежности в простых случаях записывают в виде

$$n = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma_{\text{max}}} \geq [n], \quad (17.2)$$

где n – запас прочности; $\sigma_{\text{разр}}$ – разрушающее напряжение; $[n]$ – допустимый запас прочности.

Под $\sigma_{\text{разр}}$ при действии переменных напряжений понимают предел выносливости, при действии постоянных напряжений – предел прочности или предел длительной прочности.

В более сложных случаях (нестационарные режимы нагружения) при определении запасов прочности используют условия суммирования повреждений.

Условия прочности по допускаемым напряжениям и запасам прочности связаны соотношением

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{n}. \quad (17.3)$$

Величина необходимого запаса прочности имеет довольно стабильное значение, тогда как $\sigma_{\text{разр}}$ отражает условия нагружения, [геометрию](#) и технологию детали.

При действии статических нагрузок используют также запас по несущей способности

$$n = \frac{P_{\text{разр}}}{P}, \quad (17.4)$$

где $P_{\text{разр}}$ и P – значения силового фактора (нагрузки) в момент разрушения и в рабочих условиях

Запас по несущей способности отражает перераспределение напряжений, возникающее в пластических материалах при нагрузках, близких к разрушающим.

Недостатком системы допускаемых напряжений и запасов прочности является детерминированный характер условий прочности. Они не учитывают должным образом неизбежное рассеяние разрушающих и максимальных напряжений. Этот недостаток частично устраняется статистическими запасами прочности, которые рассмотрены в дальнейшем.

Другой путь построения статистических моделей надежности – определение вероятности разрушения.

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ

Рассмотрим оценку вероятности разрушения на примере.

Переменные напряжения в элементе конструкции, возникающие при резонансных колебаниях, обозначим σ_a . Их определяют с помощью тензометрирования в рабочих условиях в местах наибольших напряжений. Величинам σ_a свойственно значительное рассеяние, связанное с неравномерностью нагрузок, условиями демпфирования и т.п.. Величину σ_a сопоставляют с пределом выносливости элемента $\sigma_{-1л}$ который также имеет разброс вследствие отклонений в технологии изготовления и рассеяния механических свойств материала. Предел выносливости соответствует определенному числу нагружений (обычно 10^7 циклов). Если в данном элементе переменное напряжение больше предела выносливости

$$\sigma_a > \sigma_{-1л}, \quad (17.5)$$

то наступает разрушение.

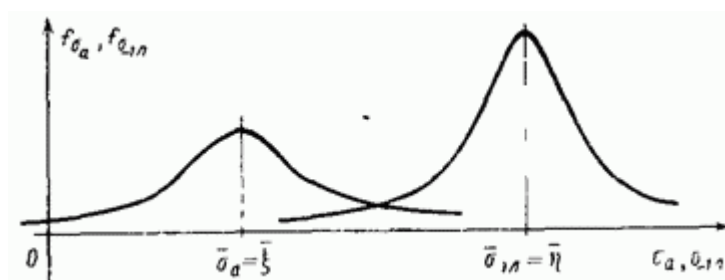


Рис. 17.1. Кривые плотности распределения переменных напряжений σ_a и пределов выносливости $\sigma_{-1л}$

Рассматриваем σ_a и $\sigma_{-1л}$ как случайные величины. На рис. 17.1 показаны кривые плотности распределения переменных напряжений и

пределов выносливости. Их строят на основании экспериментальных данных по гистограмме распределения.

Допустим, что величины σ_a и $\sigma_{-1л}$, которые для краткости обозначим соответственно η и ξ имеют нормальное распределение. Тогда и разность этих величин (функция неразрушения)

$$\zeta = \sigma_{-1л} - \sigma_a = \eta - \xi \quad (17.6)$$

распределена нормально, причем параметры распределения М.О. — среднее значение и среднее квадратическое отклонение (стандарт) соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\zeta} &= \bar{\sigma}_{-1л} - \bar{\sigma}_a = \bar{\eta} - \bar{\xi}; \\ S_{\zeta} &= \sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2 - 2K_{\zeta\eta}} \end{aligned} \right\} \quad (17.7)$$

Вероятность разрушения равна вероятности условия $\zeta < 0$ (рис. 17.2).

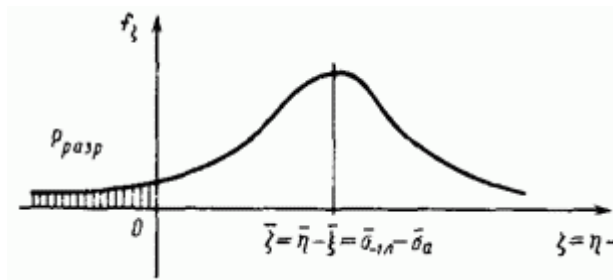


Рис. 17.2. Распределение функции неразрушения

Входящий в последнее равенство корреляционный момент $K_{\zeta\eta}$ для независимых случайных величин обращается в нуль. Так как предел выносливости и действующее в элементе переменное напряжение практически независимы, то

$$\left. \begin{aligned} S_{\zeta} &= \sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2}, \\ P_{\text{разр}} &= P(\zeta < 0) = F(0), \end{aligned} \right\} \quad (17.8)$$

где $F(\zeta)$ — функция распределения случайной величины ζ

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{S_{\zeta}}\right), \quad (17.9)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Из равенства (17.8) вытекает формула для [вероятности](#) разрушения

$$\begin{aligned} P_{\text{разр}} &= \frac{1}{2} + \Phi\left(-\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}}\right) \end{aligned} \quad (17.10)$$

или

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{v_{\xi}}\right), \quad (17.11)$$

где v_{ξ} – коэффициент вариации функции неразрушения,

$$v_{\xi} = \frac{S_{\xi}}{\bar{\xi}} = \frac{\sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2}}{\bar{\eta} - \bar{\xi}}. \quad (17.12)$$

Если воспользоваться приближенным представлением функции Лапласа

$$\begin{aligned} P_{\text{разр}} &= \frac{v_{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2v_{\xi}^2}} \times \\ &\times (1 - v_{\xi}^2 + 3v_{\xi}^4 - \dots). \end{aligned} \quad (17.13)$$

то погрешность оказывается не выше последнего использованного при вычислениях члена ряда.

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПРЕДЕЛОВ ПРОЧНОСТИ

В этом случае [вероятность](#) разрушения может быть определена из следующих соображений.

Пусть имеется переменное напряжение $\sigma_a = \xi$. Вероятность того, что предел выносливости $\sigma_{-1л} = \eta$ окажется меньше данной величины ξ (наступит разрушение), будет

$$P(\eta < \xi) = F_{\eta}(\xi), \quad (17.14)$$

где $F_{\eta}(\xi)$ [функция распределения случайной величины \$\eta\$](#) ,

$$F_{\eta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_{\eta}(\eta) d\eta. \quad (17.15)$$

Для нахождения [вероятности](#) разрушения следует учесть все возможные значения ξ (все несовместимые пути реализации события) по [формуле полной вероятности](#)

$$P_{\text{разр}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(\xi) F_{\eta}(\xi) d\xi. \quad (17.16)$$

Подобным образом находим равнозначное условие

$$\begin{aligned} P_{\text{разр}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(\eta) (1 - F_{\xi}(\eta)) d\eta = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(\eta) F_{\xi}(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (17) \quad (17.17)$$

Нахождение [вероятности](#) разрушения теперь сведено к вычислению интеграла (17.16) или (17.17).

В общем случае запас прочности может быть представлен в виде

$$n = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma_{\text{экв}}}, \quad (17.18)$$

где $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное напряжение.

Например, при одновременном действии нормальных и [касательных](#) напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (17.19)$$

Для длительной прочности при нестационарном режиме нагружения функция неразрушения зависит от общего времени [работы](#) t

$$\xi(t) = \sigma_{\text{дл}}(t) - \sigma_{\text{экв}}(t). \quad (17.20)$$

Для длительной статической прочности или сопротивления усталости справедлив степенной закон связи $\sigma_{дл}$ и времени (числа циклов) до разрушения

$$\sigma_{дл}^m(t) t = C, \quad (17.21)$$

где m и C – постоянные материала, зависящие от температуры.

Если действующее напряжение в момент времени

$$\sigma(t^*) = \sigma_0 f(t^*), \quad (17.22)$$

где σ_0 – [случайная величина](#), $f(t^*)$ – детерминированная функция времени, то при линейном законе суммирования повреждений

$$\sigma_{эКВ}(t) = \sigma_0 \times \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t [f(t^*)]^m dt^* \right\}^{\frac{1}{m}} = \sigma_0 \psi(t). \quad (17.23)$$

Для сопротивления усталости при нестационарном нагружении функция неразрушения от общего числа циклов нагружения

$$\zeta(N) = \sigma_{-1N} - \sigma_{эКВ}(N). \quad (17.24)$$

В каждый момент нагружения действующее напряжение

$$\sigma(N) = \sigma_0 f(N). \quad (17.25)$$

Учитывая зависимости типа (17.21)

$$\sigma_{-1N}^m N = C, \quad (17.21a)$$

Получим

$$\sigma_{эКВ} = \sigma_0 \times \left\{ \frac{1}{N_\Sigma} \int_0^{N_\Sigma} (f(N))^m dN \right\}^{\frac{1}{m}} = \sigma_0 \psi(N_\Sigma) \quad (17.26)$$

Для расчета должны быть известны [среднее значение](#) и среднее квадратическое отклонение пределов прочности и эквивалентного напряжения, причем

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\text{экв}}(t) &= \bar{\sigma}_0 \psi(t); \\ S_{\sigma_{\text{экв}}}(t) &= S_{\sigma_0} \psi(t).\end{aligned}\quad (17.27)$$

При нормальном распределении указанных величин используют соотношение (17.8). Вероятность разрушения зависит в рассматриваемом случае от времени работы.

Доверительные пределы для вероятности разрушения

При расчете вероятности разрушения по формуле (17.8) предполагают, что статистические характеристики пределов выносливости М.О. и стандарт η и действующих напряжений ξ относятся к генеральной совокупности (выборке бесконечно больших размеров).

В действительности указанные величины определяют по выборке (объему испытаний), содержащей конечное число образцов.

Если при определении действующих напряжений использованы результаты n_1 испытаний, то

$$\left. \begin{aligned}\bar{\xi}_{n_1} &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i; \\ S_{\xi_{n_1}} &= \left\{ \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (\xi_i - \bar{\xi}_{n_1})^2 \right\}^{1/2}.\end{aligned}\right\} \quad (17.28)$$

Соответственно для пределов прочности (n_2 — число испытаний)

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_{n_2} &= \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \eta_j; \\ S_{\eta_{n_2}} &= \left\{ \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (\eta_j - \bar{\eta}_{n_2})^2 \right\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (17.28a)$$

Оценим приближенно наибольшее значение вероятности разрушения.

Очевидно, что оно реализуется при минимальной разности средних значений и максимальном значении S_ζ

Будем использовать с доверительной вероятностью P_d следующие односторонние оценки (здесь t – коэффициент безопасности Стьюдента и $K_{S_{\max}}$ указаны, например, в работе [8]):

Значения вероятности разрушения $P_{\text{разр}}$ в зависимости от запаса прочности по средним значениям напряжений (см. Скан таблицы 1 lib.alnam.ru/book_rdm.php?id=194)

Таблица 1

1. Значения вероятности разрушения $P_{\text{разр}}$ в зависимости от запаса прочности по средним				
\bar{n}	$v_{\eta} = 0.05$ при v_{ξ}/v_{η} , равном			$v_{\eta} = 0.10$
	1	2	3	1
1	0.5	0.5	0.5	0.5
1.25	$0.905 \cdot 10^{-2}$	$0.17 \cdot 10^{-1}$	$0.6178 \cdot 10^{-1}$	$0.5938 \cdot 10^{-1}$
1.5	$0.143 \cdot 10^{-2}$	$0.3167 \cdot 10^{-4}$	$0.1441 \cdot 10^{-2}$	$0.2803 \cdot 10^{-2}$
1.75	$0.5121 \cdot 10^{-12}$	$0.85 \cdot 10^{-8}$	$0.7802 \cdot 10^{-2}$	$0.996 \cdot 10^{-4}$
2.0	$0.18987 \cdot 10^{-18}$	$0.7787 \cdot 10^{-12}$	$0.143 \cdot 10^{-7}$	$0.3911 \cdot 10^{-5}$
2.5	$0.4036 \cdot 10^{-28}$	$0.35986 \cdot 10^{-20}$	$0.7964 \cdot 10^{-14}$	$0.127 \cdot 10^{-7}$
3.0	$0.5629 \cdot 10^{-38}$	$0.707 \cdot 10^{-28}$	$0.21333 \cdot 10^{-20}$	$0.12961 \cdot 10^{-8}$
4.0	$0.2934 \cdot 10^{-47}$	$0.33216 \cdot 10^{-40}$	$0.17886 \cdot 10^{-32}$	$0.17505 \cdot 10^{-12}$

напряжениям				
при v_{ξ}/v_{η} , равном		$v_{\eta} = 0.15$ при v_{ξ}/v_{η} , равном		
2	3	1	2	3
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.1446	0.2206	0.1492	0.2389	0.305
$0.2275 \cdot 10^{-1}$	$0.6811 \cdot 10^{-1}$	$0.3216 \cdot 10^{-1}$	$0.9176 \cdot 10^{-1}$	0.1611
$0.2401 \cdot 10^{-2}$	$0.1539 \cdot 10^{-1}$	$0.6569 \cdot 10^{-2}$	$0.3005 \cdot 10^{-1}$	$0.7483 \cdot 10^{-1}$
$0.2001 \cdot 10^{-2}$	$0.2803 \cdot 10^{-2}$	$0.1441 \cdot 10^{-2}$	$0.914 \cdot 10^{-2}$	$0.3144 \cdot 10^{-1}$
$0.1366 \cdot 10^{-2}$	$0.6152 \cdot 10^{-4}$	$0.996 \cdot 10^{-4}$	$0.9043 \cdot 10^{-2}$	$0.5234 \cdot 10^{-2}$
$0.143 \cdot 10^{-7}$	$0.1239 \cdot 10^{-2}$	$0.1222 \cdot 10^{-4}$	$0.1078 \cdot 10^{-2}$	$0.8447 \cdot 10^{-2}$
$0.10071 \cdot 10^{-10}$	$0.1 \cdot 10^{-2}$	$0.6173 \cdot 10^{-6}$	$0.3911 \cdot 10^{-2}$	$0.3167 \cdot 10^{-4}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}_{\min} &= \bar{\eta}_{n_2} - t(n_2, P_d) \frac{S_{\eta_{n_2}}}{\sqrt{n_2}}; \\ S_{\xi_{\max}} &\leq K_{S_{\max}}(n_1, P_d) S_{\xi_{n_1}}; \\ \bar{\xi}_{\max} &= \bar{\xi}_{n_1} + t(n_1, P_d) \frac{S_{\xi_{n_1}}}{\sqrt{n_1}}; \\ S_{\eta_{\max}} &\leq K_{S_{\max}}(n_2, P_d) S_{\eta_{n_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.29)$$

Тогда из равенства (17.8) получим приближенную оценку

$$P_{\text{разр max}} = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\bar{\eta}_{\text{min}} - \bar{\xi}_{\text{max}}}{\sqrt{S_{\eta_{\text{max}}}^2 + S_{\xi_{\text{max}}}^2}} \right) = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{1}{v_{\xi_{\text{max}}}} \right). \quad (17.30)$$

Для расчета может быть использовано и равенство (17.13). Доверительную вероятность для приближенной оценки можно приближенно принять равной P_d .

Пример. Определить вероятность разрушения элемента конструкции, если известно, что среднее значение переменных напряжений $\xi = 100$ МПа и среднее квадратическое отклонение $S_{\xi} = 20$ МПа (по данным тензометрирования); среднее значение предела выносливости $\eta = 200$ МПа и среднее квадратическое отклонение $S_{\eta} = 30$ МПа (по данным испытаний на выносливость).

Решение. Находим по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \bar{\eta} - \bar{\xi} = 200 - 100 = 100 \text{ МПа}; \\ S_{\xi} &= \sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2} = \\ &= \sqrt{30^2 + 20^2} \approx 36 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Вероятность разрушения по формуле (17.8)

$$\begin{aligned} P_{\text{разр}} &= \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{100}{36} \right) = \frac{1}{2} - \Phi (2,78). \end{aligned}$$

По таблице значений функции Лапласа

$$\begin{aligned} \Phi (2,78) &= 0,49728; \\ P_{\text{разр}} &= \frac{1}{2} - 0,49728 = 0,272 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

По приближенной формуле (17.13)

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2,78 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2,78^2}{2}} \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{2,78^2} + 3 \frac{1}{2,78^4} \right) = \\ = 0,277 \cdot 10^{-2}.$$

Значения вероятности разрушения, вычисленные по средним значениям и с учетом рассеяния экспериментальных данных, существенно расходятся между собой. В практических расчетах следует указывать, при каких условиях получено расчетное значение вероятности разрушения.

Вероятность разрушения как характеристика прочностной надежности правильно отражает качественные особенности задачи: она возрастает при уменьшении запаса прочности и увеличении рассеяния нагрузок и механических свойств материалов. Однако **ее использование как нормативной характеристики** для определения отказов ответственных конструкций (разрушений с тяжелыми последствиями) **ограничено**:

а) значение вероятности разрушения зависит от «хвостов» распределений, которые даже по выборкам большого объема ($n > 100$) определяются весьма неточно (погрешность может составлять несколько порядков). В связи с этим расчетная вероятность разрушения носит условный характер. Реальный смысл имеет только сравнение элементов выполненных и вновь проектируемых конструкций, проводимое в сопоставимых условиях;

б) при расчете допускается возможность аварии (катастрофы), это создает затруднения психологического характера.

Рассмотренная статистическая модель пригодна для отказов с ограниченными последствиями, для которых допустимо использование вероятностей разрушения $P_{\text{разр}} > 10^{-3}$.

Более обоснованно использование в качестве нормативных характеристик, особенно для прочностных отказов с тяжелыми последствиями, статистических запасов прочности.

Тема 5: Задачи и вероятностные методы их решения на основе статистического моделирования случайных величин и случайных процессов

Лекция 18. Определение статистических характеристик прочности

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ

Предельное (разрушающее) и действующие напряжения в опасной точке детали можно рассматривать как случайные величины.

Тогда запас прочности конкретной детали представляет величину случайную:

$$n = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\eta}{\xi}. \quad (18.1)$$

Если $F(n)$ – функция распределения запасов прочности, то величина запаса прочности, соответствующая уровню значимости q удовлетворяет условию

$$F [n(q)] = \text{Вер} [n < n (q)] = q. \quad (18.2)$$

В большинстве практических задач параметры функции распределения «восстанавливаются» по выборкам ограниченного объема с определенной доверительной вероятностью. В связи с этим и запас прочности зависит от принятого значения доверительной вероятности

$$n = n (q, P_d).$$

Например, запись

$$n (q, P_d) = (0,01; 0,95) = 2$$

означает, что только у 1% всех изделий запас прочности может оказаться меньше 2, причем это утверждение справедливо, по крайней мере, для 95% случаев испытаний. С математической точки зрения это равенство имеет следующий смысл:

$$\text{Вер} [\text{Вер} (n < n (q, P_d)) = q] = P_d. \quad (18.3)$$

Приближенный метод определения статистического запаса прочности

В практических расчетах запас прочности

$$n = \frac{(\sigma_{\text{разр}})_{\min}}{(\sigma_{\text{max}})_{\max}} = \frac{\eta_{\min}}{\xi_{\max}}. \quad (18.4)$$

Используют нижние значения для пределов прочности и пределов выносливости по справочным данным или механическим испытаниям.

При определении максимального напряжения в опасной точке детали σ_{max} учитывают наиболее неблагоприятные условия нагружения и другие факторы, приводящие к возрастанию напряжений. Однако достоверность оценки $\sigma_{\text{разр}}$ и σ_{max} не указывается, что затрудняет сопоставление надежности по запасу прочности.

Наиболее простой и практически пригодный метод определения статистических запасов прочности состоит в следующем. Минимальные характеристики прочности и максимальные значения напряжений устанавливают в соответствии с нормированным уровнем значимости и доверительной вероятности:

$$n(q, P_d) = \frac{\eta_{\min}(q_{\eta}, P_{d\eta})}{\xi_{\max}(q_{\xi}, P_{d\xi})}, \quad (18.5)$$

где q_{η} , q_{ξ} , и $P_{d\eta}$, $P_{d\xi}$, – уровни значимости и доверительные вероятности, с которыми определяют (экспериментально) разрушающее напряжение и максимальное действующее напряжение. В практических расчетах можно принять приближенные соотношения:

$$\begin{aligned} q &= q_{\eta} = q_{\xi}; \\ P_d &= P_{d\eta} = P_{d\xi}. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Статистические запасы прочности, как и обычные запасы прочности, имеют условное значение. Они служат критериями сравнения надежности вновь создаваемых изделий с изделиями, удовлетворительно работающими в эксплуатации. Основное преимущество статистического запаса прочности по сравнению с обычными (детерминистскими) запасами состоит в том, что сопоставление приводится к одинаковым условиям (по объему используемой информации) по рассеянию механических свойств материала и действующих напряжений.

Если разрушающее и действующее напряжения распределены по нормальному закону, то можно принять

$$n(q, P_d) = \frac{\bar{\eta}_{n_1} - K_{\eta}(n_1, q, P_d) S_{\eta n_1}}{\xi_{n_2} + K_{\xi}(n_2, q, P_d) S_{\xi n_2}}, \quad (18.7)$$

где η_{n1} - среднее значение $\sigma_{разр}$; n_1 - число испытаний (объем выборки), на основании которого определено значение $S_{\eta n1}$ - среднее квадратическое отклонение для выборки объема n_1 ; ξ_{n2} и $S_{\xi n2}$ - среднее значение и среднее квадратическое отклонение, полученное для действующего напряжения в опасной точке при n_2 испытаниях [см. формулы (17.28, 17.28а) и K_{η} , K_{ξ} - односторонние толерантные коэффициенты.

Экспериментальное исследование действующих напряжений путем тензометрирования часто применяют при определении переменных напряжений (валы, лопадки и т. п.). В других случаях изучают экспериментально условия нагружения (усилия, температуры и др.), оценивают вероятность появления максимальных нагрузок и т. п.

Пример. Требуется определить (при уровне значимости $q = 0,01$ и доверительной вероятности $P_d = 0,99$) запас прочности элемента конструкции, для которой среднее значение предела выносливости, полученное в шести испытаниях n_1 составило $\sigma_{-1} = \eta_{n1} = 420$ МПа, а среднее квадратическое отклонение $S_{\eta n1} = 20$ МПа. Среднее значение переменных напряжений при тензометрировании 10 элементов n_2 дало М.О. $\sigma_a = \xi_{n2} = 60$ МПа, а среднее квадратическое отклонение $S_{\xi n2} = 15$ МПа.

Решение. Минимальное значение предела выносливости

$$\eta_{min} = \bar{\eta}_{n_1} - K_{\eta}(n_1, q, P_d) S_{\eta n_1}. \quad (18.8)$$

При $n_1 = 6$, $q = 0,01$, и $P_d = 0,99$ по **таблице 1 значений толерантных коэффициентов** находим

$$K_{\eta}(6; 0,01; 0,99) = 5,00$$

и тогда

$$\eta_{min} = 420 - 5 \cdot 20 = 320 \text{ МПа.}$$

Максимальное значение переменных напряжений

$$\xi_{\max} = \bar{\xi}_n + K_{\xi}(n_2, q, P_d) S_{\xi n_2}. \quad (18.9)$$

При $n_2 = 10$, $q = 0,01$, и $P_d = 0,99$ по таблице значений толерантных коэффициентов находим

$$K_{\xi}(10; 0,01; 0,99) = 4,06$$

и

$$\eta_{\max} = 60 + 4,06 \cdot 15 = 121 \text{ МПа.}$$

Запас прочности

$$n(0,01; 0,99) = \frac{320}{121} = 2,64.$$

Значения [вероятности](#) разрушения $P_{\text{разр}}$ в зависимости от запаса прочности по средним значениям напряжений (см. Скан таблицы 1 на стр. 119).

[Нормальный закон распределения](#) повышает опасность больших отклонений и часто более целесообразно использовать усеченные распределения.

Учитывая, что вероятностные расчеты носят сравнительный характер, рекомендуется для единообразия использовать приближенные толерантные коэффициенты.

Рассмотрим теперь случай, когда статистические характеристики напряжений считают известными. Это означает, что случайные величины признают достоверными на основании предыдущего опыта или большого числа исследований. Тогда статистический запас будет зависеть только от уровня значимости.

При [нормальном распределении](#) будем иметь

$$\begin{aligned} n(q) &= \frac{\bar{\eta} - u_{1-q} S_{\eta}}{\bar{\xi} + u_{1-q} S_{\xi}} = \\ &= \bar{n} \frac{1 - u_{1-q} v_{\eta}}{1 + u_{1-q} v_{\xi}}, \end{aligned} \quad (18.10)$$

где u_{1-q} — односторонний [квантиль доверительной вероятности](#)

$$P_d = 1 - q.$$

Величина

$$\bar{n} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}}$$

представляет собой запас по [средним значениям](#).

Коэффициенты вариации

$$v_{\eta} = \frac{S_{\eta}}{\bar{\eta}}; \quad v_{\xi} = \frac{S_{\xi}}{\bar{\xi}}.$$

Значения u_{1-q} для некоторых значений уровня значимости будут следующими:

q	0.10	0.05	0.01	0.0014
u_{1-q}	1.29	1.64	2.33	3.00

Связь запасов прочности в вероятности разрушения. [Вероятность](#) разрушения определяют по формуле

$$\begin{aligned} P_{\text{разр}} &= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\xi}{S_{\xi}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{v_{\xi}}\right), \end{aligned} \quad (18.11)$$

где v_{ξ} – коэффициент вариации функции неразрушения,

$$v_{\xi} = \frac{\sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2}}{\bar{\eta} - \bar{\xi}}. \quad (18.12)$$

Разделив числитель и знаменатель последнего соотношения на ξ получим

$$v_{\xi} = \frac{\sqrt{v_{\xi}^2 + n^{-2}v_{\eta}^2}}{\bar{n} - 1}, \quad (18.13)$$

где v_ξ и v_η – коэффициенты вариации действующих и разрушающих напряжений; \bar{n} – запас по средним значениям. Теперь равенство (18.11) можно записать так:

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\bar{n} - 1}{\sqrt{v_\xi^2 + \bar{n}^2 v_\eta^2}} \right). \quad (18.14)$$

Из этого соотношения следует, что вероятность разрушения определяется запасом прочности по средним значениям разрушающих и действующих напряжений и коэффициентами их вариаций.

Связь вероятности разрушения и запасов прочности показана в табл. 1.

Запасы по средним значениям больше практически применяемых запасов прочности, при определении которых используют наименьшие значения разрушающих напряжений и наибольшие значения действующих напряжений.

Лекция 19. Определение статистических характеристик внешних нагрузок

Внешние нагрузки в процессе эксплуатации сооружений, как правило, представляют собой не просто случайные величины, но и случайные процессы. Для корректного учета изменчивости нагрузок в исследованиях прочности необходимо статистическое описание их характеристик, позволяющее с достаточной достоверностью решать задачи статики, динамики и устойчивости, и применение методов теории вероятности и теории случайных процессов.

В зависимости от сложности решаемых задач и необходимой точности их решения возможны эмпирические исследования для определения вероятности отказа, когда это связано с превышением некоторого заданного уровня параметра нагрузки $S(t)$ хотя бы один раз в течение интервала времени T , равного назначенному сроку службы. В этом случае допустимо рассматривать отказ в рамках элементарной теории вероятности. Для этого необходимо знать плотность распределения

вероятности $p(S/T)$ максимальных значений параметра нагрузки $S(t)$ в пределах различных интервалов времени наблюдения T ($T_1 < T_2 < T_3$) (рис.19.1.).

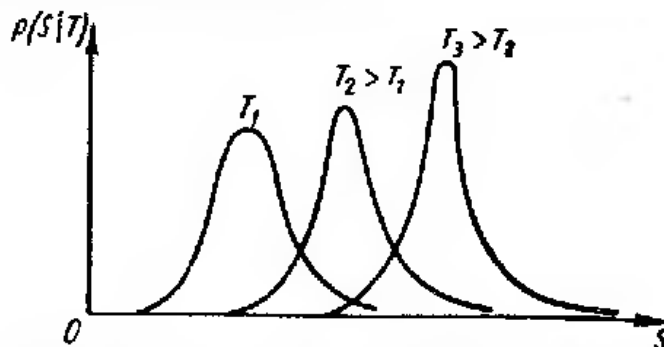


Рис. 19.1. Изменение плотности распределения вероятности $p(S/T)$ для максимальных значений нагрузки с увеличением времени наблюдения T .

Существенно, что распределения зависят от продолжительности наблюдений. Если разбить время T на m равных достаточно больших интервалов ΔT , чтобы корреляция максимумов для двух соседних интервалов была пренебрежимо малой, можно абсолютные максимумы для каждого интервала ΔT приближенно рассматривать как случайные величины в последовательности независимых испытаний. Тогда плотность вероятности $p(S/T)$ определится по формуле [7]:

$$p(S|T) = m F^{m-1}(S|\Delta T) \frac{\partial F(S|\Delta T)}{\partial s}, \quad (19.1)$$

где $F(S|\Delta T)$ – функция распределения вероятности для максимумов на базе наблюдения, равной ΔT .

Рассмотренный выше подход определения статистических характеристик внешнего нагружения предполагает квазистатическое приложение нагрузок и поэтому максимальные значения параметра нагрузки в заданном интервале времени можно считать случайными величинами.

Если параметр нагрузки описывает динамический процесс, то его следует трактовать как случайный процесс с множеством реализаций, каждое из которых характеризуется различным распределением во времени (рис. 19.2.).

Вероятностный анализ распределений и осреднение будет, естественно, зависеть для случайных процессов от интервалов $t_1 - t_2$, $t_1 - t_3$ и т. д.

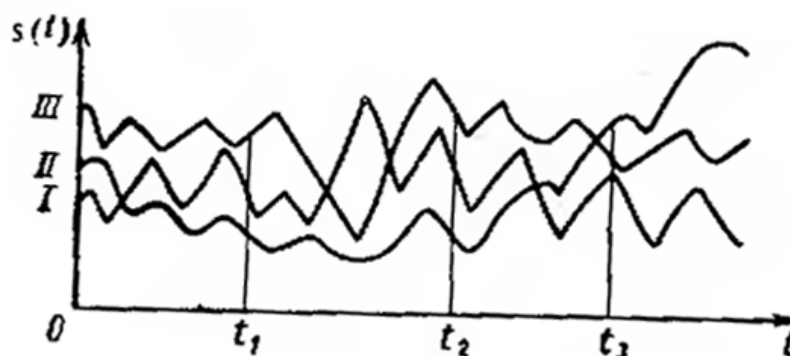


Рис. 19.2. Нагрузка как случайный процесс (эргодический)

Для стационарных случайных процессов при $T \rightarrow \infty$ для каждой реализации характеристики математического ожидания, дисперсии и корреляционных функций при замене интегралов конечными суммами можно получить эмпирически или путем моделирования с необходимой точностью выбирая продолжительность реализации T [7].

В широком, хотя и не особенно точном понимании, случайным процессом $\xi(t)$ является любой протекающий во времени процесс, управляемый вероятностными законами. Более определенно: случайная функция $\xi(t)$ — это такая функция, значение которой при любом возможном t есть случайная величина.

В математической теории нет никаких оснований к тому, чтобы придавать аргументу t какую-либо определенную интерпретацию.

Принято называть $\xi(t)$ случайным (или стохастическим, или вероятностным) процессом, если t меняется непрерывно, и случайной последовательностью (процессом с дискретным параметром, с дискретным временем), если t принимает счетное множество значений. Термин «случайная функция» охватывает оба эти случая, т. е. применяется тогда, когда характер изменения t произволен.

В свою очередь множество возможных значений x самой случайной функции $\xi(t)$ тоже может быть как непрерывным, так и дискретным. Таким образом, имеются четыре разновидности случайной функции в соответствии с четырьмя комбинациями дискретности и непрерывности x и t . Иногда все эти разновидности называют случайными процессами, говоря о дискретном или непрерывном процессе (в зависимости от характера x) с дискретным или непрерывным временем t . Разумеется, возможны и смешанные — дискретно-непрерывные процессы, но изучать удобнее каждый из этих видов в отдельности

Если аргумент t принимает конечное множество значений $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, то случайная последовательность сводится, очевидно, к

совокупности n случайных величин $\xi(t_1), \xi(t_2), \xi(t_3), \dots, \xi(t_n)$, т. е. может быть интерпретирована как n -мерная [случайная величина](#), задаваемая, как обычно, своим n -мерным распределением [вероятности](#) $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если же множество значений t бесконечно (счетно или непрерывно), то мы выходим за рамки классической [теории вероятностей](#) и необходимо специально определить, как в этом случае надо понимать задание [случайной функции](#) $\xi(t)$.

Беря за исходный пункт множество всех возможных реализаций случайной функции, можно получить исчерпывающую ее характеристику заданием [распределения вероятностей](#) этих реализаций. Равносильный, но по форме отличный подход, принадлежащий Е. Е. Слуцкому, опирается на то, что $\xi(t)$ при каждом фиксированном значении t есть [случайная величина](#). Эта величина полностью задана, если известно ее распределение

$$\omega_1(t, x) dx = P\{x < \xi(t) \leq x + dx\}, \quad (19.3)$$

т. е. известна мгновенная плотность [вероятности](#) $\omega_1(t, x)$ вообще говоря, зависящая от t . Разумеется, вместо $\omega_1(t, x)$ можно задать соответствующую [характеристическую функцию](#)

$$\varphi_1(t, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \omega_1(t, x) dx. \quad (19.4)$$

Случайные процессы и их основные статистические характеристики

Функцию, значение которой при каждом значении независимой переменной является [случайной величиной](#), называют случайной функцией. [Случайные функции](#), для которых независимой переменной является время t называют случайными процессами или [стохастическими процессами](#).

Если, например, проведено n отдельных опытов, то в результате [случайный процесс](#) $X(t)$ может принять n различных неслучайных (регулярных) функций времени $x_i(t)$ где $i = 1, 2, \dots, n$

Всякая функция $x_i(t)$ которой может оказаться равным случайный процесс $X(t)$ в результате опыта, называется реализацией [случайного процесса](#) (или возможным значением случайного процесса). Сказать заранее, по какой из реализаций пойдет процесс, невозможно.

Для любого фиксированного момента времени, например $t = t_1$ реализация случайного процесса $x_i(t_1)$ представляет собой конкретную величину, значение же **случайной функции** $X(t_1)$ является случайной величиной, называемой сечением случайного процесса в момент времени t_1 . Поэтому нельзя утверждать, что **случайный процесс** в данный момент времени имеет такое то детерминированное значение, можно говорить лишь о **вероятности** того, что в данный момент времени значение случайного процесса как **случайной величины** будет находиться в определенных пределах.

Статистические методы изучают не каждую из реализаций $x_i(t)$ образующих множество $X(t)$, а свойства всего множества в целом с помощью усреднения свойств входящих в него реализаций (рис. 19.2.). Поэтому при исследовании о поведении объекта судят не по отношению к какому-либо определенному воздействию, представляющему заданную функцию времени, а по отношению к целой совокупности воздействий.

Как известно, статистические свойства **случайной величины** x определяют по ее **функции распределения** (интегральному закону распределения) $F(x)$ или плотности **вероятности** (дифференциальному закону распределения) $\omega(x)$.

Случайные величины могут иметь различные законы распределения: равномерный, нормальный, экспоненциальный и др. Во многих задачах очень часто приходится иметь дело с **нормальным законом распределения** (или законом Гаусса), который получается, если **случайная величина** определяется суммарным эффектом от действия большого числа различных независимых факторов.

Напомним, что случайная величина x при нормальном законе распределения полностью определяется **математическим ожиданием** (средним значением) m_x и средним квадратическим отклонением σ_x .

Аналитическое выражение **функции распределения** в этом случае

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_{-\infty}^x e^{-(x-m_x)^2/(2\sigma_x^2)} dx. \quad (19.5)$$

Следует обратить внимание на то, что, хотя переменная интегрирования и верхний предел интегрирования обозначены одним символом, это не отражается на конечных результатах и не должно привести к недоразумениям.

Аналитическое выражение
плотности вероятности для нормального закона распределения

выражение

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-(x-m_x)^2 / (2\sigma_x^2)}. \quad (19.6)$$

Типичные графики функций распределения $F(x)$ и плотности вероятности $w(x)$ для различных значений σ_x приведены на (рис. 19.3 а, б). Изменение среднего значения m_x вызывает только смещение кривых $F(x)$ и $w(x)$ вдоль оси абсцисс без изменения их формы, а изменение величины σ_x вызывает изменение масштаба вдоль обеих координатных осей, причем площадь, ограничиваемая кривой $w(x)$ и осью абсцисс, всегда остается конечной и равной единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1, \quad (19.7)$$

поскольку $F(\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$

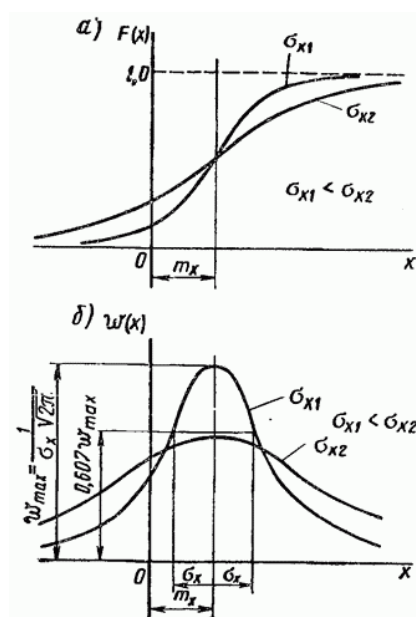


Рис. 19.3

При конечных пределах интегрирования величина интеграла будет меньше единицы. Уже при пределах интегрирования от $(m_x - 3\sigma_x)$ до $(m_x + 3\sigma_x)$ величина интеграла равна 0,997. Так как вероятность того, что x лежит между $(m_x - 3\sigma_x)$ и $(m_x + 3\sigma_x)$ равна 0,997, то величину $3\sigma_x$ часто используют в практических расчетах в качестве верхней границы отклонения от среднего значения.

Для случайного процесса также вводят понятие функции распределения $F(x,t)$ и плотности вероятности $\omega(x,t)$, которые зависят от фиксированного момента времени наблюдения t и от некоторого выбранного уровня x , т. е. являются функциями двух переменных: x и t .

Рассмотрим случайную величину $X(t_1)$ т. е. сечение случайного процесса в момент времени t_1 . Одномерной функцией распределения (функцией распределения первого порядка) случайного процесса $X(t)$ называют вероятность того, что текущее значение случайного процесса $X(t_1)$ в момент времени t_1 не превышает некоторого заданного уровня (числа) x_1 т. е.

$$F_1(x_1, t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}. \quad (19.8)$$

Если функция $F_1(x_1, t_1)$ имеет частную производную по x_1 , т. е.

$$\omega_1(x_1, t_1) = \partial F_1(x_1, t_1) / \partial x_1, \quad (19.9)$$

то функцию $\omega_1(x_1, t_1)$ называют одномерной плотностью вероятности (плотностью вероятности первого порядка) случайного процесса. Величина

$$\omega_1(x_1, t_1) dx_1 = P\{x_1 < X(t_1) \leq x_1 + dx_1\} \quad (19.10)$$

представляет собой вероятность того, что $X(t)$ находится в момент времени $t = t_1$ в интервале от x_1 до $x_1 + dx_1$. В каждые отдельные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n случайные величины (сечения случайного процесса) $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ будут иметь свои, в общем случае разные, одномерные функции распределения $F_1(x_1, t_1), F_1(x_2, t_2), \dots, F_1(x_n, t_n)$ и плотности вероятности $\omega_1(x_1, t_1), \omega_1(x_2, t_2), \dots, \omega_1(x_n, t_n)$.

Функции $F_1(x, t)$ и $\omega_1(x, t)$ являются простейшими статистическими характеристиками случайного процесса. Они характеризуют случайный процесс изолированно в отдельных его сечениях, не раскрывая взаимной связи между сечениями случайного процесса, т. е. между возможными значениями случайного процесса в различные моменты времени.

Знания этих функций еще недостаточно для описания случайного процесса в общем случае. Необходимо охарактеризовать также взаимную связь случайных величин в различные произвольно взятые моменты времени.

Рассмотрим теперь случайные величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$, относящиеся к двум разным моментам времени t_1 и t_2 , наблюдения случайного процесса.

Вероятность того, что $X(t)$ будет не больше x_1 при $t = t_1$ и не больше x_2 при $t = t_2$, т. е.

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2\}, \quad (19.11)$$

называют **двумерной функцией распределения** (функцией распределения второго порядка). Если функция $F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ имеет **частные производные** по x_1 и x_2 т. е.

$$\omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (19.12)$$

то функцию $\omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ называют **двумерной плотностью вероятности** (плотностью вероятности второго порядка). Величина

$$\omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = P\{x_1 < X(t_1) \leq x_1 + dx_1; x_2 < X(t_2) \leq x_2 + dx_2\}, \quad (19.13)$$

равна вероятности того, что $X(t)$ при $t = t_1$ будет находиться в интервале от x_1 до $x_1 + dx_1$, а при $t = t_2$ в интервале от x_2 до $x_2 + dx_2$

Аналогично можно ввести понятие от n -мерной **функции распределения**:

$$F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2, \dots; X(t_n) \leq x_n\}. \quad (19.14)$$

Если функция F_n имеет **частные производные** по всем аргументам x_1, x_2, \dots, x_n , т. е.

$$\omega_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}, \quad (19.15)$$

то функцию ω_n называют n -мерной плотностью **вероятности**. Чем выше порядок n , тем полнее описываются статистические свойства **случайного процесса**. Зная n -мерную функцию распределения, можно найти по ней одномерную, двумерную и другие вплоть до $(n-1)$ **функции распределения** более низкого порядка. Однако многомерные законы распределения случайных процессов являются сравнительно громоздкими характеристиками и с ними крайне трудно оперировать на практике. Поэтому

при изучении случайных процессов часто ограничиваются случаями, когда для описания случайного процесса достаточно знать только его одномерный или двумерный закон распределения.

Примером случайного процесса, который полностью характеризуется одномерной плотностью **вероятности**, является так называемый чистый **случайный процесс**, или **белый шум**. Значения $X(t)$ в этом процессе, взятые в разные моменты времени t , совершенно независимы друг от друга, как бы близко ни были выбраны эти моменты времени. Это означает, что кривая белого шума содержит всплески, затухающие за бесконечно малые промежутки времени. Так как значения $X(t)$ например, в момент времени t_1 и t_2 независимы, то **вероятность** совпадения событий, заключающихся в нахождении $X(t)$ между x_1 и $x_1 + dx_1$ в момент времени t_1 и между x_2 и $x_2 + dx_2$ в момент t_2 равна произведению вероятностей каждого из этих событий, поэтому

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w_1(x_1, t_1) w_1(x_2, t_2) \quad (19.16)$$

и вообще для **белого шума**

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \\ = w_1(x_1, t_1) w_1(x_2, t_2) \dots w_1(x_n, t_n), \quad (19.17)$$

т. е. все плотности **вероятности** белого шума определяются из одномерной плотности вероятности.

Для **случайных процессов** общего вида, если известно, какие значения приняла величина $X(t_k)$ в момент времени t_k тем самым имеем некоторую информацию относительно $X(t_m)$, где $k < m$ так как величины $X(t_k)$ и $X(t_m)$, вообще говоря, зависимы. Если кроме $X(t_k)$ известна $X(t_l)$, где $l < k$, то информация о $X(t_m)$ еще более увеличивается. Таким образом, увеличение наших знаний о поведении процесса до момента t_k приводит к тому, что увеличивается информация о $X(t_m)$.

Однако существует особый класс **случайных процессов**, впервые исследованных известным математиком А. А. Марковым и называемых марковскими случайными процессами, для которых знание значения процесса в момент t_k уже содержит в себе всю информацию о будущем ходе процесса, какую только можно извлечь из поведения процесса до этого момента. В случае **марковского случайного процесса** для определения вероятностных характеристик процесса в момент времени t_m достаточно знать вероятностные характеристики для любого одного предшествующего момента времени t_k . Знание вероятностных характеристик процесса для

других предшествующих значений времени, например t_i не прибавляет информации, необходимой для нахождения $X(t_m)$.

Для **марковского процесса** справедливо следующее соотношение:

$$\omega_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \frac{\omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \omega_2(x_2, t_2; x_3, t_3) \dots \omega_2(x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)}{\omega_1(x_1, t_1) \omega_1(x_2, t_2) \dots \omega_1(x_{n-1}, t_{n-1})}, \quad (19.18)$$

т. е. все плотности **вероятности** марковского процесса определяются из двумерной плотности вероятности. Другими словами, **марковские случайные процессы** полностью характеризуются двумерной плотностью вероятности.

Понятие о **функции распределения** и плотности вероятности **случайного процесса** обычно используют при теоретических построениях и определениях. В практике исследования прочности сооружений широкое распространение получили сравнительно более простые, хотя и менее полные характеристики **случайных процессов**, аналогичные **числовым характеристикам случайных величин**. Примерами таких характеристик служат рассматриваемые ниже **математическое ожидание, дисперсия, среднее значение квадрата случайного процесса, корреляционная функция, спектральная плотность** и другие.

Математическим ожиданием (средним значением) $m_x(t)$ случайного процесса $X(t)$ называют величину

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \omega_1(x, t) dx, \quad (19.19)$$

где $\omega_1(x, t)$ – одномерная плотность **вероятности случайного процесса** $X(t)$.

Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ представляет собой некоторую неслучайную (регулярную) функцию времени $m_x(t)$, около которой группируются и относительно которой колеблются все реализации данного случайного процесса (рис. 19.4).

Математическое ожидание случайного процесса в каждый фиксированный момент времени t_k равно математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса $X(t_k)$ и представляет собой операцию вероятностного усреднения **случайной величины** $X(t_k)$, при котором каждое возможное значение для случайной величины x принимается с весом, равным элементу **вероятности** $\omega_1(x, t_k)dx$.

Математическое ожидание называют **средним значением, случайного процесс**

а по множеству (средним по ансамблю, статистическим средним), поскольку оно представляет собой вероятностно усредненное значение бесконечного множества реализации случайного процесса.

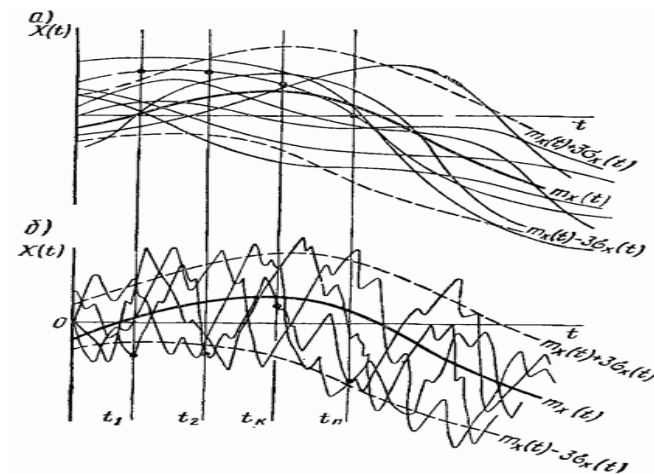


Рис. 19.4

Средним значением квадрата случайного процесса называют величину

$$\tilde{x}^2(t) = M[\{X(t)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x, t) dx. \quad (19.20)$$

Часто вводят в рассмотрение так называемый центрированный случайный процесс $\dot{X}(t)$ под которым понимают отклонение случайного процесса $X(t)$ от его среднего значения $m_x(t)$ или

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t). \quad (19.21)$$

Тогда случайный процесс $X(t)$ можно рассматривать как сумму двух составляющих: регулярной составляющей, равной математическому ожиданию $m_x(t)$ и центрированной случайной составляющей $\dot{X}(t)$ т. е.

$$X(t) = m_x(t) + \dot{X}(t). \quad (19.22)$$

Очевидно, что математическое ожидание центрированного случайного процесса равно нулю:

$$M[\dot{X}(t)] = M[X(t) - m_x(t)] = m_x(t) - m_x(t) = 0. \quad (19.23)$$

Для того чтобы каким-то образом учесть степень разбросанности реализаций случайного процесса относительно его **среднего значения**, вводят понятие дисперсии случайного процесса, которая равна математическому ожиданию квадрата центрированного случайного процесса:

$$D_x(t) = M \{ \dot{X}(t) \}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - m_x(t)\}^2 w_1(x, t) dx. \quad (19.24)$$

Дисперсия случайного процесса является неслучайной (регулярной) функцией времени $D_x(t)$ значение которой в каждый момент времени t_k равно дисперсии соответствующего сечения $X(t_k)$ случайного процесса.

Легко показать, что **математическое ожидание** $m_x(t)$, **дисперсия** $D_x(t)$ и **среднее значение** квадрата **случайного процесса**, имеющие размерность квадрата **случайной величины**, связаны соотношением

$$\tilde{x}^2(t) = D_x(t) + m_x^2(t). \quad (19.25)$$

Откуда видно, что **среднее значение** квадрата **случайного процесса** в определенной мере учитывает и среднее значение случайного процесса, и степень рассеяния его реализаций относительно этого среднего значения.

На практике часто бывает удобно пользоваться статистическими характеристиками случайного процесса, имеющими ту же размерность, что и сама **случайная величина**. К таким характеристикам относят:

среднее квадратическое значение **случайного процесса**

$$x_{с.к}(t) = \sqrt{\tilde{x}^2(t)} = \sqrt{D_x(t) + m_x^2(t)}, \quad (19.26)$$

равное арифметическому значению квадратного корня из **среднего значения** квадрата случайного процесса;

среднее квадратическое отклонение случайного процесса

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}, \quad (19.27)$$

равное арифметическому значению квадратного корня из **дисперсии случайного процесса**.

Из вышесказанного видно, что среднее квадратическое значение $x_{с.к}(t)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_x(t)$ случайного процесса в общем случае

не совпадают. Последняя характеристика используется только для центрированных случайных процессов.

В заключение заметим, что хотя ни математическое ожидание, ни дисперсия случайного процесса ни в какой мере не характеризуют степень статистической зависимости между сечениями случайного процесса в различные моменты времени, знания этих характеристик часто достаточно для решения многих задач.

Корреляционные функции случайных процессов

Математическое ожидание и дисперсия являются важными характеристиками случайного процесса, но они не дают достаточного представления о том, какой характер будут иметь отдельные реализации случайного процесса. Это хорошо видно из рис. 19.4, где показаны реализации двух случайных процессов, совершенно различных по своей структуре, хотя и имеющих одинаковые значения математического ожидания и дисперсии. Штриховыми линиями на рис. 19.4 показаны значения $3\sigma_x(t)$ для случайных процессов.

Процесс, изображенный на рис. 19.4, а, от одного сечения к другому протекает сравнительно плавно, а процесс на рис. 19.4, б обладает сильной изменчивостью от сечения к сечению. Поэтому статистическая связь между сечениями в первом случае больше, чем во втором, однако ни по математическому ожиданию, ни по дисперсии этого установить нельзя.

Чтобы в какой-то мере охарактеризовать внутреннюю структуру случайного процесса, т. е. учесть связь между значениями случайного процесса в различные моменты времени или, иными словами, учесть степень изменчивости случайного процесса, необходимо ввести понятие о корреляционной (автокорреляционной) функции случайного процесса.

Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию двух аргументов $R_x(t_1; t_2)$ которая для каждой пары произвольно выбранных значений аргументов (моментов времени) t_1 и t_2 равна математическому ожиданию произведения двух случайных величин $\dot{X}(t_1)$ и $\dot{X}(t_2)$ соответствующих сечений случайного процесса:

$$R_x(t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{x_1 - m_x(t_1)\} \times \\ \times \{x_2 - m_x(t_2)\} w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2, \quad (19.28)$$

где $\omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ – двумерная плотность вероятности;

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t). \quad (19.29)$$

центрированный случайный процесс;

$m_x(t)$ – математическое ожидание (среднее значение) случайного процесса.

Различные случайные процессы в зависимости от того, как изменяются их статистические характеристики с течением времени, делят на стационарные и нестационарные. Разделяют стационарность в узком смысле и стационарность в широком смысле.

Стационарным в узком смысле называют случайный процесс $X(t)$, если его n -мерные функции распределения и плотности вероятности при любом n не зависят от сдвига всех точек t_1, t_2, \dots, t_n вдоль оси времени на одинаковую величину τ т. е.

$$\left. \begin{aligned} F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= F_n(x_1, t_1 + \tau; \\ &x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau); \\ \omega_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= \omega_n(x_1, t_1 + \tau; \\ &x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau). \end{aligned} \right\} \quad (19.30)$$

Это означает, что два процесса $X(t)$ и $X(t+\tau)$ имеют одинаковые статистические свойства для любого τ т. е. статистические характеристики стационарного случайного процесса неизменны во времени.

Стационарный случайный процесс – это своего рода аналог установившегося процесса в детерминированных системах. Любой переходный процесс не является стационарным.

Стационарным в широком смысле называют случайный процесс $X(t)$, математическое ожидание которого постоянно:

$$M[X(t)] = m_x = \text{const}, \quad (19.31)$$

а корреляционная функция зависит только от одной переменной – разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$; при этом корреляционную функцию обозначают

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= R_x(t_1, t_1 + \tau) = M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_1 + \tau)] = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{x_1 - m_x(t_1)\} \{x_2 - m_x(t_1 + \tau)\} \times \\
 &\quad \times \omega_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2.
 \end{aligned}
 \tag{19.32}$$

Процессы, стационарные в узком смысле, обязательно стационарны и в широком смысле; однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Понятие **случайного процесса**, стационарного в широком смысле, вводится тогда, когда в качестве статистических характеристик случайного процесса используются только **математическое ожидание** и **корреляционная функция**. Часть **теории случайных процессов**, которая описывает свойства **случайного процесса** через его математическое ожидание и корреляционную функцию, называют корреляционной теорией.

Для случайного процесса с **нормальным законом распределения** математическое ожидание и корреляционная функция полностью определяют его n -мерную плотность **вероятности**.

Поэтому для нормальных случайных процессов понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают.

Теория **стационарных процессов** разработана наиболее полно и позволяет сравнительно просто производить расчеты для многих практических случаев. Поэтому допущение о стационарности иногда целесообразно делать также и для тех случаев, когда **случайный процесс** хотя и нестационарен, но на рассматриваемом отрезке времени работы системы статистические характеристики сигналов не успевают сколько-нибудь существенно измениться. В дальнейшем, если не будет оговорено особо, будут рассматриваться случайные процессы, стационарные в широком смысле.

При изучении случайных процессов, стационарных в широком смысле, можно ограничиться рассмотрением только процессов с математическим ожиданием (**средним значением**), равным нулю, т. е. $m_x(t) = 0$, так как **случайный процесс** с ненулевым математическим ожиданием представляют как сумму процесса с нулевым математическим ожиданием и постоянной неслучайной (регулярной) величиной, равной **математическому ожиданию** этого процесса.

При $m_x(t) = 0$ выражение для **корреляционной функции**

$$R_x(\tau) = M[\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \omega_2 \times \\ \times (x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (19.33)$$

В теории случайных процессов пользуются двумя понятиями средних значений. Первое понятие о среднем значении – это *среднее значение по множеству* (или *математическое ожидание*), которое определяется на основе наблюдения над множеством реализаций случайного процесса в один и тот же момент времени. Среднее значение по множеству принято обозначать волнистой чертой над выражением, описывающим случайную функцию:

$$\tilde{x}(t) = m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \omega_1(x, t) dx. \quad (19.34)$$

В общем случае среднее значение по множеству является функцией времени t .

Другое понятие о среднем значении – это среднее значение по времени, которое определяется на основе наблюдения за отдельной реализацией случайного процесса $x(t)$ на протяжении достаточно длительного времени T . Среднее значение по времени обозначают прямой чертой над соответствующим выражением случайной функции и определяют по формуле:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (19.35)$$

если этот предел существует.

Среднее значение по времени в общем случае различно для отдельных реализаций множества, определяющих случайный процесс. Вообще говоря, для одного и того же случайного процесса среднее по множеству и среднее по времени значения различны. Однако существует класс стационарных случайных процессов, называемых эргодическими, для которых среднее по множеству равно среднему по времени, т. е. $\bar{x} = \tilde{x}$.

Корреляционная функция $R_x(\tau)$ эргодического стационарного случайного процесса $X(t)$ неограниченно убывает по модулю при $|\tau| \rightarrow \infty$

Однако надо иметь в виду, что не всякий стационарный случайный процесс является эргодическим, например случайный процесс $X(t)$, каждая

реализация которого $x_i(t)$ постоянна во времени (рис. 19.5), является стационарным, но не эргодическим.

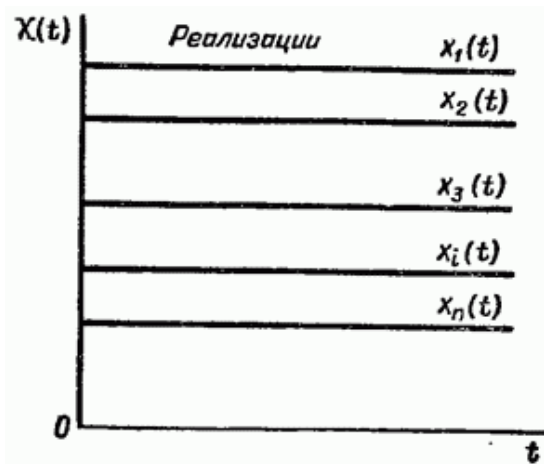


Рис. 19.5

В этом случае **средние значения**, определенные по одной реализации и в результате обработки множества реализаций, не совпадают. Один и тот же случайный процесс в общем случае может быть эргодическим по отношению к одним статистическим характеристикам и неэргодическим по отношению к другим. В дальнейшем будем считать, что по отношению ко всем статистическим характеристикам условия эргодичности выполняются.

Свойство эргодичности имеет очень большое практическое значение. Для определения статистических свойств некоторых объектов, если трудно осуществить одновременное наблюдение за ними в произвольно выбранный момент времени (например, при наличии одного опытного образца), его можно заменить длительным наблюдением за одним объектом. Иными словами, отдельная реализация эргодического случайного процесса на бесконечном промежутке времени полностью определяет весь **случайный процесс** с его бесконечными реализациями. Собственно говоря, этот факт лежит в основе описанного ниже метода экспериментального определения корреляционной функции **стационарного случайного процесса** по одной реализации.

Как видно из определения, **корреляционная функция** представляет собой **среднее значение** по множеству. Для **эргодических случайных процессов** корреляционную функцию R_x можно определить как среднее по времени от произведения $[x(t) - \bar{x}]$ и $[x(t+\tau) - \bar{x}]$, т. е.

$$R_x(\tau) = M[\dot{X}(t) \dot{X}(t + \tau)] = \overline{\{x(t) - \bar{x}\} \{x(t + \tau) - \bar{x}\}} = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{x(t) - \bar{x}\} \{x(t + \tau) - \bar{x}\} dt, \quad (19.36)$$

где $x(t)$ — любая реализация случайного процесса; \bar{x} — среднее значение по времени, определяемое по

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (19.37)$$

Если среднее значение случайного процесса равно нулю $\bar{x} = 0$, то

$$R_x(\tau) = \overline{x(t) x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt. \quad (19.38)$$

Основываясь на свойстве эргодичности, можно дисперсию D_x определить как среднее по времени от квадрата центрированного случайного процесса, т. е.

$$D_x = M[\{\dot{X}(t)\}^2] = \overline{\{x(t) - \bar{x}\}^2} = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{x(t) - \bar{x}\} \{x(t) - \bar{x}\} dt. \quad (19.39)$$

Сравнивая выражения $R_x(\tau)$ и D_x при $\tau = 0$, можно установить очень важную связь между дисперсией и корреляционной функцией — дисперсия стационарного случайного процесса равна начальному значению корреляционной функции:

$$D_x = R_x(0) = \text{const.} \quad (19.40)$$

Из этого видно, что дисперсия стационарного случайного процесса постоянна, а следовательно, постоянно и среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \text{const.} \quad (19.41)$$

Статистические свойства связи двух случайных процессов $X(t)$ и $G(t)$ можно характеризовать взаимной корреляционной

функцией $R_{xg}(t_1, t_2)$, которая для каждой пары произвольно выбранных значений аргументов t_1 и t_2 равна

$$R_{xg}(t_1, t_2) = M[\hat{X}(t_1) \hat{G}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{x - m_x(t_1)\} \{g - m_g(t_2)\} w_2(x, t_1; g, t_2) dx dg. \quad (19.42)$$

Для эргодических случайных процессов вместо этого можно записать

$$R_{xg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{x(t) - \bar{x}\} \{g(t + \tau) - \bar{g}\} dt, \quad (19.43)$$

где $x(t)$ и $g(t)$ – любые реализации стационарных случайных процессов $X(t)$ и $G(t)$, соответственно.

Взаимная корреляционная функция $R_{xg}(\tau)$ характеризует взаимную статистическую связь двух случайных процессов $X(t)$ и $G(t)$ в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на промежуток времени τ . Значение $R_{xg}(0)$ характеризует эту связь в один и тот же момент времени.

Из предыдущего выражения следует, что

$$R_{xg}(\tau) = R_{gx}(-\tau). \quad (19.44)$$

Если случайные процессы $X(t)$ и $G(t)$ статистически не связаны друг с другом и имеют равные нулю средние значения, то их взаимная корреляционная функция для всех τ равна нулю. Однако обратный вывод о том, что если взаимная корреляционная функция равна нулю, то процессы независимы, можно сделать лишь в отдельных случаях (в частности, для процессов с нормальным законом распределения), общей же силы обратный закон не имеет.

Заметим, что корреляционные функции могут вычисляться и для неслучайных (регулярных) функций времени. Однако когда говорят о корреляционной функции $R_x(\tau)$ регулярной функции $x(t)$, то под этим понимают просто результат формального применения к регулярной функции $x(t)$ операции, выражаемой интегралом:

$$R_x(\tau) = \overline{x(t) x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \right) \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt. \quad (19.45)$$

Приведем некоторые основные свойства корреляционных функций $R_x(\tau)$.

1. Начальное значение корреляционной функции равно дисперсии случайного процесса:

$$R_x(0) = D_x. \quad (19.46)$$

2. Значение корреляционной функции при любом τ не может превышать ее начального значения, т. е.

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|. \quad (19.47)$$

Чтобы доказать это, рассмотрим очевидное неравенство $[x(t) - x(t + \tau)]^2 \geq 0$ из которого следует $x^2(t) + x^2(t + \tau) \geq 2x(t)x(t + \tau)$.

Находим средние значения по времени от обеих частей последнего неравенства:

$$\overline{x^2(t) + x^2(t + \tau)} = \overline{x^2(t)} + \overline{x^2(t + \tau)} = \overline{x^2(t)} + \overline{x^2(t)} = 2\overline{x^2} = 2D_x = 2R_x(0) \text{ и } \overline{2x(t)x(t + \tau)} = 2R_x(\tau). \quad (19.48)$$

Таким образом, получим неравенство $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$.

3. Корреляционная функция есть четная функция τ , т. е.

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau). \quad (19.49)$$

Это вытекает из самого определения корреляционной функции. Действительно,

$$R_x(\tau) = \overline{[x(t) - \bar{x}][x(t + \tau) - \bar{x}]} = \overline{[x(t - \tau) - \bar{x}][x(t) - \bar{x}]} = R_x(-\tau), \quad (19.50)$$

поэтому на графике корреляционная функция всегда симметрична относительно оси ординат.

4. Корреляционная функция суммы случайных процессов

$Z(t) = X(t) + G(t)$ определяется выражением

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_g(\tau) + R_{xg}(\tau) + R_{gx}(\tau), \quad (19.51)$$

где $R_{xg}(\tau)$ и $R_{gx}(\tau)$ — взаимные корреляционные функции

Действительно,

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= M[\{X(t) + G(t)\} \{X(t+\tau) + G(t+\tau)\}] = \\ &= M[X(t)X(t+\tau)] + M[G(t)G(t+\tau)] + M[X(t)G(t+\tau)] + \\ &+ M[G(t)X(t+\tau)] = R_x(\tau) + R_g(\tau) + R_{xg}(\tau) + R_{gx}(\tau). \end{aligned} \quad (19.52)$$

5. Корреляционная функция постоянной величины $x(t) = A_0$ равна квадрату этой постоянной A_0^2 , что вытекает из самого определения корреляционной функции:

$$R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \overline{A_0 A_0} = A_0^2. \quad (19.53)$$

6. Корреляционная функция периодической функции, например $x(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi)$ представляет собой косинусоиду, т. е.

$$R_x(\tau) = (A^2/2) \cos \omega_1 \tau, \quad (19.54)$$

имеющую ту же частоту ω_1 , что и $x(t)$, и не зависящую от сдвига фазы φ .

Чтобы доказать это, заметим, что при нахождении корреляционных функций периодических функций $x(t)$ можно использовать следующее равенство:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)x(t+\tau) dt, \quad (19.55)$$

где $T_0 = 2\pi/\omega_0$ — период функции $x(t)$.

Последнее равенство получается после замены интеграла с пределами от $-T$ до T при $T \rightarrow \infty$ суммой отдельных интегралов с пределами от $(k-$

1) T_0 до kT_0 , где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ и использования периодичности подынтегральных функций.

Тогда, учитывая сказанное выше, получим

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \sin(\omega_1 t + \varphi) \sin[\omega_1(t + \tau) + \varphi] dt = \\ &= \frac{A^2}{2T_0} \int_0^{T_0} [\cos \omega_1 \tau - \cos(\omega_1 \tau + 2\omega_1 t + 2\varphi)] dt = \\ &= (A^2/2) \cos \omega_1 \tau. \end{aligned} \quad (19.56)$$

7. Корреляционная функция временной функции, разлагаемой в ряд Фурье:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (19.57)$$

имеет на основании изложенного выше следующий вид:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= A_0^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^n (A_k^2/2) \cos \omega_k \tau. \end{aligned} \quad (19.58)$$

8. Типичная корреляционная функция стационарного случайного процесса имеет вид, представленный на (рис. 19.6). Ее можно аппроксимировать следующим аналитическим выражением:

$$R_x(\tau) = R_x(0) e^{-\alpha|\tau|} = D_x e^{-\alpha|\tau|}. \quad (19.59)$$

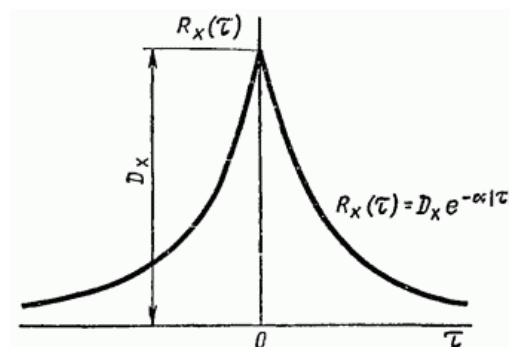


Рис. 19.6.

Лекция 20. Определение средней долговечности при действии циклических напряжений со случайными амплитудами

Расчет на прочность при нерегулярной переменной нагруженности (ГОСТ 25.101-83 «Расчеты и испытания на прочность. Методы схематизации случайных процессов нагружения элементов машин и конструкций и статистического представления результатов»)

Определение долговечности при нерегулярном нагружении производится обычно по следующей схеме. На первом этапе устанавливаются характеристики уровня нагруженности детали или элемента конструкции в виде функции распределения амплитуд эксплуатационных напряжений. В наиболее общем случае широкополосного процесса схематизацию случайного процесса с целью построения функции распределения амплитуд напряжений, эквивалентных случайному процессу по степени усталостного повреждения, производят одним из известных методов: максимумов, экстремумов, размахов, полных циклов, «дождя» и др. Метод полных циклов, например, дает, как принято считать, наряду с методом «дождя» наиболее приемлемые результаты для оценки долговечности при нерегулярном нагружении. Полученные величины амплитуд напряжений располагают в возрастающем порядке, образуя вариационный ряд амплитуд. По величинам амплитуд напряжений и соответствующим ординатам наносят точки на график и проводят через эти точки линию. На основании анализа опытных данных, обработка осциллограмм случайного процесса весьма часто приводит к эмпирическим функциям распределения амплитуд напряжений, существенно отличающихся от нормального или какого-либо другого из известных законов распределения. Теоретический закон распределения амплитуд напряжений зависит от метода схематизации эксплуатационных нагрузок и во многих случаях оказывается трудно определяемым.

Расчет на прочность при нерегулярной переменной нагруженности предполагает использование той или иной **гипотезы накопления повреждений**.

Например, скорректированная линейная гипотеза накопления усталостных повреждений имеет следующий вид:

$$a_p = \int_{\sigma_a} \frac{dn(\sigma_a)}{N(\sigma_a)} \quad (20.1)$$

где $dn(\sigma_a)$ — количество циклов действия данной амплитуды переменных напряжений σ_a за срок службы $N_{0.5}$;

$N(\sigma_a)$ – долговечность до разрушения или до образования трещины заданного размера при действии амплитуды σ_a (определяется по кривой усталости детали);

α_p – скорректированная сумма повреждений при действии всех повреждающих амплитуд переменных напряжений.

Значение $dn(\sigma_a)$ определяется в зависимости от вида функции распределения действующих напряжений по следующей формуле:

$$dn(\sigma_a) = N_{0,5} \cdot dF(\sigma_a) \quad (20.2)$$

где $dF(\sigma_a)$ – элементарная вероятность попадания амплитуд в бесконечно малый диапазон

$$dF(\sigma_a) = f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a \quad (20.3)$$

$F(\sigma_a)$, $f(\sigma_a)$ – функции распределения и плотности распределения действующих переменных амплитуд соответственно.

Профессором Когаевым В.П. получена формула для определения величины α_p , которая зависит от особенностей спектра эксплуатационной переменной нагрузки:

$$\alpha_p = \frac{\xi - u}{\sigma_{a\max} - u} \quad (20.4)$$

где $\sigma_{a\max}$ – максимальная амплитуда действующих напряжений; u – предел выносливости образца бесконечно большого диаметра или предельное повреждающее напряжение, принимаемое равным приблизительно половине предела неограниченной выносливости гладких лабораторных образцов стандартного размера:

$$u = 0,5 \cdot \sigma_{-1\infty} \quad (20.5)$$

$$\xi = \frac{\int_u^{\sigma_{a\max}} f(\sigma_a) \cdot \sigma_a \cdot d\sigma_a}{\int_u^{\sigma_{a\max}} f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a} \quad (20.6)$$

Интегрирование в формуле (20.1) ведется по всем амплитудам вплоть до максимальной амплитуды действующего спектра или блока нагружения, превышающим предел неограниченной выносливости материала детали или элемента конструкции $\sigma_{-1\infty}$. Интегрирование в формуле (20.6) ведется по амплитудам, превышающим предельное повреждающее напряжение u . Схема расчета долговечности до разрушения иллюстрируется рисунком (Рис. 20.1).

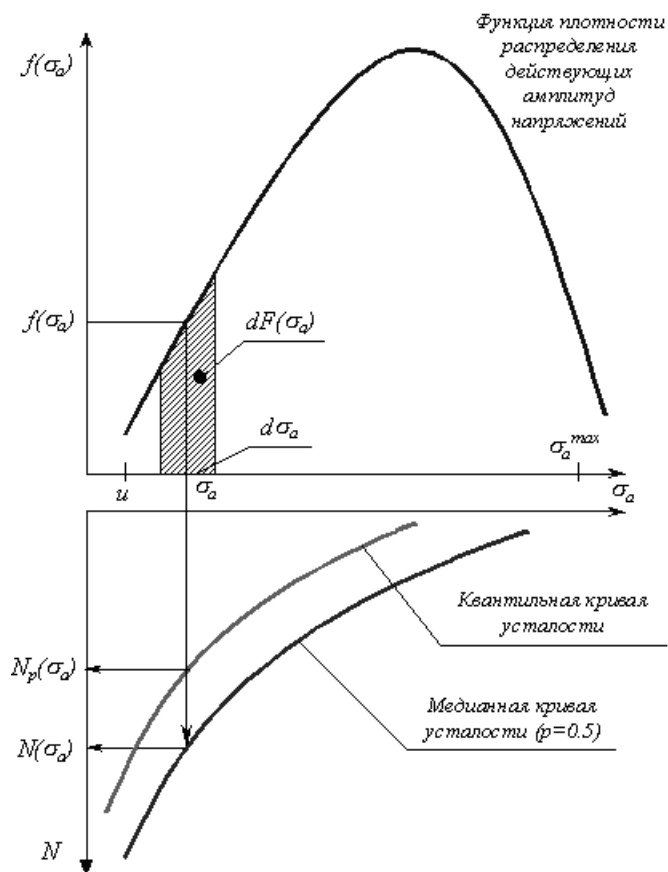


Рис. 20.1. Схема к расчету долговечности при нерегулярном переменном нагружении

Окончательная формула для определения оценки среднего срока службы детали или долговечности до разрушения (образования трещины заданного размера) имеет на основании уравнений (20.1) – (20.6) следующий вид:

$$N_{0,5} = \frac{a_p}{\int_{\sigma_{-1\infty}}^{\sigma_{a \max}} \frac{f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a}{N(\sigma_a)}} \quad (20.7)$$

Таким образом, для определения средней долговечности при нерегулярном переменном нагружении необходимо:

- 1) **знать функцию распределения действующих напряжений**, которая оценивается по результатам анализа спектра эксплуатационной переменной нагрузки одним из известных методов схематизации (метод размаха, максимумов, полных циклов и т.п.)
- 2) **иметь кривую усталости детали при регулярном переменном нагружении**. Это квантильная кривая (рис. 20.1) для определения долговечности, стоящей в знаменателе формулы (20.7).

Этого недостаточно для определения функции распределения долговечности при нерегулярном нагружении, которая представляет особый интерес в связи с необходимостью расчета гарантированного ресурса для ответственных деталей и элементов конструкций и сооружений. С этой целью для оценки долговечности при нерегулярном нагружении, соответствующей вероятности разрушения P , в формуле (20.7) вместо медианной ($p=0,5$) долговечности $N(\sigma_a)$ должна использоваться долговечность $N_p(\sigma_a)$ (квантиль долговечности), соответствующая вероятности p , которая определяется по кривой усталости заданной вероятности разрушения (квантильной кривой усталости).

$$N_p = \frac{a_p}{\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \frac{f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a}{N_p(\sigma_a)}} \quad (20.8)$$

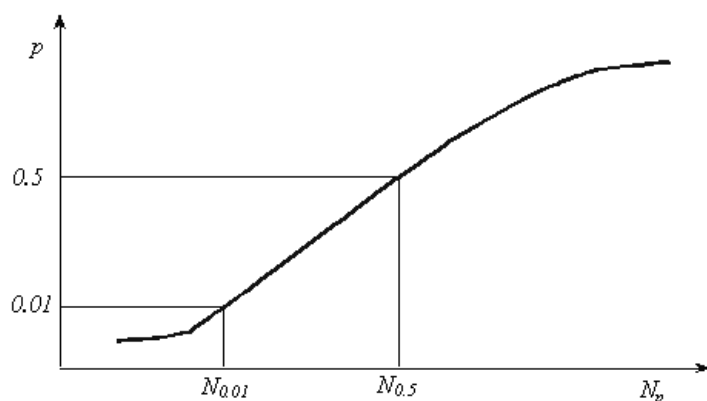


Рис. 20.2. График функции распределения долговечности до разрушения при нерегулярном переменном нагружении

При варьировании величиной p получим функцию распределения долговечности до разрушения при нерегулярном переменном нагружении, общий вид которой представлен на рисунке (**Рис. 20.2**).

Пример.

Построить функцию распределения долговечности до разрушения детали из алюминиевого сплава при нерегулярном нагружении, заданном распределением амплитуд спектра эксплуатационной нагрузки в соответствии с законом Рэлея:

$$f(\sigma_a) = \frac{\sigma_a}{S^2} \cdot e^{\left(-\frac{\sigma_a^2}{2S^2}\right)}, \quad (20.9)$$

где параметр $s=30$ МПа, максимальная амплитуда $\sigma_{\max}=100$ МПа. Эта функция представлена на рисунке (Рис. 20.3)..

Пусть медианная кривая усталости детали при симметричном цикле имеет следующий вид:

$$\sigma_a = \sigma_{-1\infty} + A \cdot [\lg(N)]^{-2} \quad (20.10)$$

где параметры $\sigma_{-1\infty}$ и A равны соответственно 50 и 1000 МПа.

Для расчета медианы долговечности достаточно этих данных. Для построения всей функции распределения необходимо располагать также параметрами квантильных кривых усталости, то есть кривых усталости, построенных по параметру вероятности разрушения. Так как построение семейства таких кривых требует большого числа экспериментальных данных, что не всегда возможно при длительных усталостных испытаниях, в первом приближении для вычисления квантили долговечности при регулярном нагружении воспользуемся известным приближением функции распределения логарифма долговечности на основании нормального закона:

$$\lg N_p = \lg N_{0,5} + s_{\lg N} \cdot z_p, \quad (20.11)$$

где $\lg N_{0,5}$ определяется по уравнению медианной кривой усталости, а среднее квадратическое отклонение примем постоянным и равным $s_{\lg N} = 0,15$, что в первом приближении подтверждается большим числом экспериментальных данных усталостных испытаний деталей, элементов авиаконструкций и конструктивно подобных образцов из алюминиевых сплавов; z_p — квантиль нормированного нормального закона распределения, соответствующая вероятности p . Тогда уравнение (20.8) для определения функции распределения ресурса при нерегулярном нагружении примет следующий вид:

$$N_p = \frac{a_p}{\int_{50}^{100} \frac{\sigma_a}{900} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_a^2}{1800}\right) \cdot d\sigma_a \cdot 10^{\left(\frac{\sigma_a - 50}{1000}\right)^{-0,5} + z_p \cdot 0,15}}, \quad (20.12)$$

где

$$a_p = \frac{\int_{25}^{100} \sigma_a \cdot f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a}{\int_{25}^{100} f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a} - 25 \quad (20.13)$$

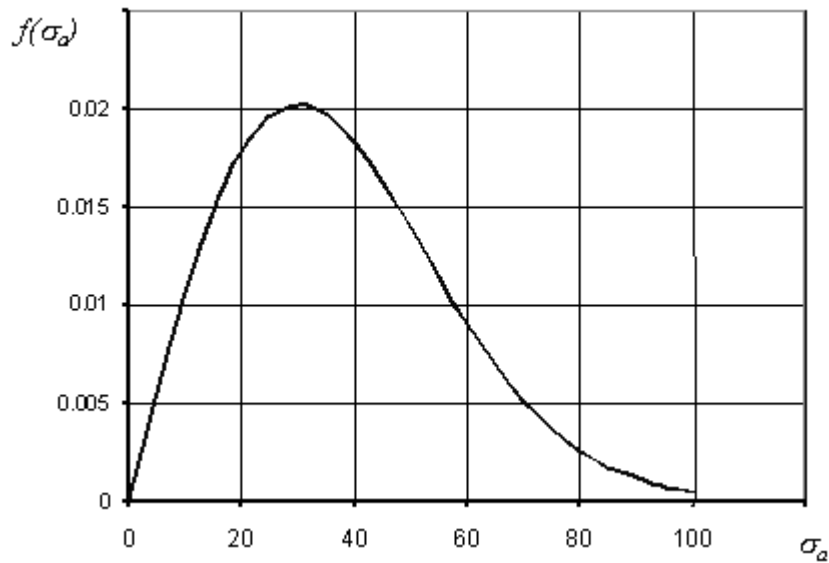


Рис. 20.3. Функция плотности распределения амплитуд спектра эксплуатационной нагрузки

Проведенный расчет функции распределения долговечности при нерегулярном переменном нагружении представлен в таблице 20.1.

Таблица 20.1. Расчет функции распределения логарифма долговечности при нерегулярном нагружении

P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.01	.05	.1	.2	.3	.5	.7	.8	.9	.95	.99
(20.5)	.74	.842	.896	.962	.01	.089	.167	.215	.281	.335	.437
(20.6)	.45	.552	.607	.673	.72	.799	.878	.925	.991	.046	.148

В таблице 20.1 для примера представлен также расчет логарифма долговечности при той же нагруженности, но по степенному уравнению кривой усталости с нулевым значением предела неограниченной выносливости:

$$N = \left(\frac{C}{\sigma} \right)^m \quad (20.14)$$

где параметр $m=4$, $C=10^{3.5}$. На рисунке (**Рис. 20.4**) построены графики этих функций на нормальной вероятностной бумаге.

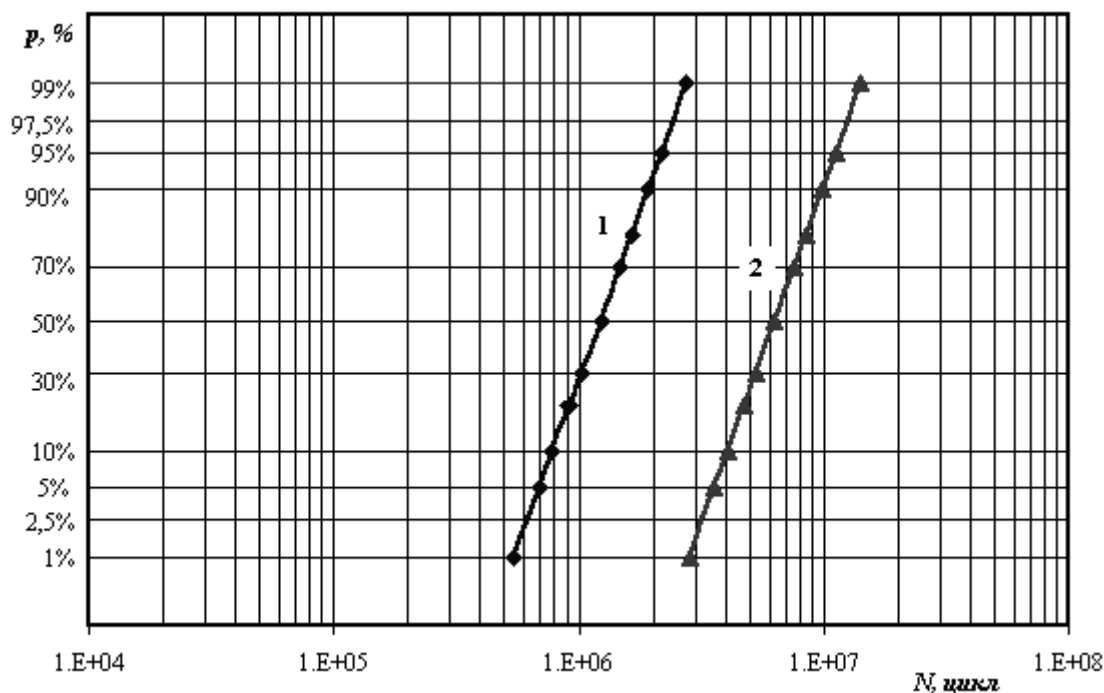


Рис. 20.4. Расчетные функции распределения логарифма долговечности при нерегулярном нагружении по уравнениям(20.12) (линия 1), (20.15) (линия 2)

$$N_p = \frac{\alpha_p}{\int_0^{100} \frac{\sigma_a}{900} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_a^2}{1800}\right) \cdot d\sigma_a \cdot \left(\frac{10^{3.5}}{\sigma_a}\right)^4 10^{z_p \cdot 0.15}}, \quad (20.15)$$

где

$$\alpha_p = \frac{\int_0^{100} \sigma_a \cdot f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a}{\int_0^{100} f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a} \cdot 100. \quad (20.16)$$

Отметим, что при расчете по уравнению (20.12) значение α_p составило 0,283, а при расчете по уравнению (20.15) – 0,373. Кривые усталости для двух рассматриваемых в примере вариантов представлены на рисунке **Рис. 20.5**.

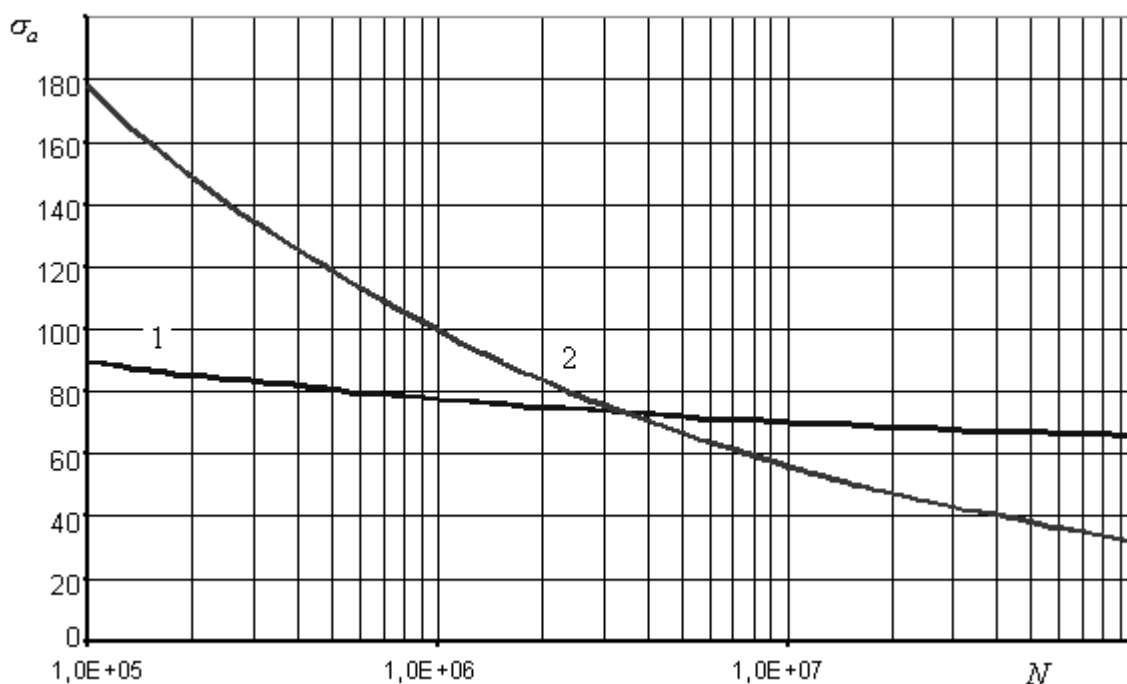


Рис. 20.5. Кривые усталости детали при симметричном нагружении, построенные по уравнениям (20.12) (кривая 1), (20.15) (кривая 2)

Основой расчета долговечности при нерегулярной нагрузке, как видно из рассмотренных выше примеров, является обоснование уравнения кривой усталости детали при регулярном нагружении. Наиболее надежным способом обоснования такой кривой усталости являются прямые усталостные испытания натурных деталей с последующей статистической обработкой их результатов. Как показывают расчеты, для достижения достаточной точности оценивания характеристик усталостных свойств при усталостных испытаниях требуется порядка 30-50 объектов, что в условиях натурных испытаний является практически нереальным.

Опыт показывает, что гипотеза линейного суммирования позволяет достаточно точно определить долговечность, если все амплитуды превышают предел выносливости материала детали и отсутствуют резкие всплески напряжений. Кроме того, опытами показано, что линейное суммирование повреждений подтверждается при монотонном увеличении амплитуд с ростом числа циклов, и действует иной закон накопления повреждений, если сначала приложить циклическую нагрузку с амплитудами, близкими к пределу текучести материала.

Таким образом, на долговечность существенно влияет история нагружения. Экспериментально установлено, что образец, нагруженный сначала циклическими напряжениями, меньшими предела выносливости, при дальнейшем повышении амплитуд малыми порциями показывает большую долговечность, чем исходная. В то же время предварительно

перенапряжение образца циклическими напряжениями выше предела выносливости приводит к противоположным результатам. Однако вредное влияние перенапряжения начинает сказываться только после некоторого предельного числа циклов перенапряжения, зависящего от величины этих напряжений.

При случайном изменении амплитуд напряжений явления усталостного упрочнения и разупрочнения будут чередоваться и отчасти нивелироваться, что оправдывает в известной степени применение гипотезы накопления повреждений к таким нерегулярным режимам изменения напряжений.

Любой теоретический подход к проблеме долговечности конструкции при нерегулярном изменении напряжений требует экспериментальной проверки теоретических методов.

В настоящее время исследования проводятся по двум основным направлениям. Одно из них состоит в испытании непосредственно конструкций по программе нагружения, возможно ближе подходящей к экспериментально определенному спектру нагрузок.

Другое направление исследования состоит в испытании лабораторных образцов по различным ступенчатым программам циклического нагружения, в которых изменяется последовательность чередования нагрузок разной интенсивности с различным количеством циклов их действия. Исследуется влияние параметров нагрузки на долговечность образцов и полученные закономерности используются для оценки долговечности конструкций.

Лекция 21. Определение средней долговечности при действии циклических напряжений со случайными амплитудами

Спектральные плотности случайных процессов

При исследовании стационарных случайных процессов удобно пользоваться еще одной характеристикой **стационарного случайного процесса**, называемой спектральной плотностью. Во многих случаях, особенно при исследовании динамики сооружений, **спектральная плотность** оказывается более удобной характеристикой, чем **корреляционная функция**. Спектральная плотность $\dot{S}_x(\omega)$ **случайного процесса** $X(t)$ определяется как **преобразование Фурье** для корреляционных функций $R_x(\tau)$, т. е.

$$\dot{S}_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (21.1)$$

Если воспользоваться формулой Эйлера $e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$, то это можно представить как

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \quad (21.2)$$

Так как $R_x(\tau) \sin \omega\tau$ - нечетная функция τ , то в последнем выражении второй интеграл равен нулю. Учитывая, что $R_x(\tau) \cos \omega\tau$ - четная функция τ , получаем

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (21.3)$$

Так как $\cos \omega\tau = -\cos \omega(-\tau)$, то следует, что

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega). \quad (21.4)$$

Таким образом, спектральная плотность $S_x(\omega)$ является действительной и четной функцией частоты ω . Поэтому на графике спектральная плотность всегда симметрична относительно оси ординат.

Если спектральная плотность известна, то по формуле обратного преобразования Фурье можно найти соответствующую ей корреляционную функцию:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (21.5)$$

Используя это выражение и первое свойство корреляционных функций, можно установить важную зависимость между дисперсией D_x и спектральной плотностью $S_x(\omega)$ случайного процесса:

$$D_x = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (21.6)$$

Следовательно, физический смысл спектральной плотности состоит в том, что она характеризует распределение амплитуд того или иного параметра случайного процесса по частотному спектру.

Спектральная плотность может быть найдена экспериментально через среднюю величину квадрата амплитуды гармоник реализации случайного процесса. Приборы, применяемые для этой цели и состоящие из анализатора спектра и вычислителя среднего значения квадрата амплитуды гармоник, называются спектрометрами. Экспериментально находить спектральную плотность сложнее, чем корреляционную функцию, поэтому на практике чаще всего спектральную плотность вычисляют по известной корреляционной функции с помощью формул, приведенных выше.

Взаимная спектральная плотность $S_{xg}(j\omega)$ двух стационарных случайных процессов $X(t)$ и $G(t)$ определяется как преобразование Фурье от взаимной корреляционной функции $R_{xg}(\tau)$ т. е.

$$S_{xg}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xg}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (21.7)$$

По взаимной спектральной плотности можно, применяя обратное преобразование Фурье, найти выражение для взаимной корреляционной функции:

$$R_{xg}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xg}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (21.8)$$

Взаимная спектральная плотность $S_{xg}(j\omega)$ является мерой статистической связи между двумя стационарными случайными процессами: $X(t)$ и $G(t)$. Если процессы $X(t)$ и $G(t)$ некоррелированы и имеют равные нулю средние значения, то взаимная спектральная плотность равна нулю, т. е.

$$S_{xg}(j\omega) = 0. \quad (21.9)$$

В отличие от спектральной плотности $S_x(\omega)$ взаимная спектральная плотность $S_{xg}(j\omega)$ не является четной функцией ω и представляет собой не вещественную, а комплексную функцию.

Иногда в рассмотрение вводят нормированную спектральную плотность $\beta_x(\omega)$, являющуюся изображением Фурье нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau)$:

$$\beta_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = S_x(\omega)/D_x. \quad (21.10)$$

Нормированная **спектральная плотность** имеет размерность времени.

Определение средней долговечности при действии циклических напряжений со случайными амплитудами

Пусть процесс состоит из случайных симметричных циклов нагружений, характеризующихся максимальными напряжениями S в каждом. Используя гипотезу суммирования усталостных повреждений и уравнения кривых усталости $N = N(S)$ при однородном режиме напряжений, когда известны эффективные периоды изменения напряжений $T_{эфф}$ и плотности вероятности $\rho(S)$ максимальных значений процесса $S(t)$, то средняя долговечность может быть определена по формуле Болотина В.В. [8]:

$$T = \frac{T_{эфф}}{\int_0^{\infty} \frac{\rho(S) dS}{N(S)}} \quad (21.11)$$

Для некоторых других представлений $N = N(S)$ и $\rho(S)$ процессов $S(t)$ в таблице 21.1 (столбец 3) работы [5] приводятся формулы вычисления средней долговечности. В этих формулах $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $P(\chi^2, n)$ – функция χ^2 -распределения Пирсона, протабулированная в различных работах по курсу теории вероятности.

Эффективный период $T_{эфф}$ выражают через спектральную плотность $\Phi(\omega)$ процесса $S(t)$ согласно формуле:

$$T_{эфф} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} \omega^2 \Phi(\omega) d\omega}} \quad (21.12)$$

Таблица 21.1

1. Формулы для вычисления средней долговечности при циклических напряжениях со случайными амплитудами

Распределение $p(S)$ максимумов процесса $s(t)$	Уравнение кривой усталости	Средняя долговечность T
Общий случай	Общий случай	$\frac{T_{эфф}}{\int_0^\infty \frac{p(S) dS}{N(S)}}$
$\frac{S}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right)$ (узкополосный гауссовский случайный процесс)	$N = N_1 \left(\frac{R}{S}\right)^m \text{ при } S \geq R$ $N \rightarrow \infty \text{ при } S < R$	$\frac{N_1 T_{эфф}}{\frac{m}{2^{1/2}} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) \mu \left[\left(\frac{R}{\sigma_s}\right)^2, m+2\right]} \left(\frac{R}{\sigma_s}\right)^m$
		$\frac{N_1 T_{эфф}}{\frac{m}{2^{1/2}} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \left(\frac{R}{\sigma_s}\right)^m$ (приближенная формула при $\sigma_s \gg R$)
		$\sqrt{\frac{\pi}{2}} N_1 T_{эфф} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_s^2}\right)$ (приближенная формула при $\sigma_s \ll R$)
	$N = N_1 \left(\frac{R}{S}\right)^m \text{ при } S > 0$	$\frac{N_1 T_{эфф}}{\frac{m}{2^{1/2}} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \left(\frac{R}{\sigma_s}\right)^m$

12)

Строго говоря, эти формулы справедливы только для узкополосных стационарных эргодических случайных процессов. Для широкополосных случайных процессов они дают оценку снизу. В работе [10] даются формулы для нестационарных широкополосных случайных процессов. Вычисленная по этим формулам средняя долговечность является условной в том смысле, что она найдена при фиксированных характеристиках прочности. Учет разброса характеристик прочности рассмотрим в следующей лекции.

Узкополосный случайный процесс

Узкополосным называется случайный процесс, спектральная плотность которого существенно отлична от нуля лишь в пределах узкой полосы частот, сосредоточенной вблизи некоторой центральной частоты.

Широкополосный случайный процесс

Широкополосным называется случайный процесс, спектральная плотность которого существенно отлична от нуля в пределах широкой полосы частот относительно некоторой центральной частоты.

Стационарный процесс

Стационарный случайный процесс есть ансамбль реализаций, статистические свойства которого инвариантны по отношению к переносу начала отсчета времени. Стационарный процесс может быть эргодическим или неэргодическим

Эргодический случайный процесс

Эргодическим называется случайный стационарный процесс, для которого результаты усреднения по времени в пределах отдельной реализации одинаковы для всех реализаций. Таким образом, усреднение по времени для любой отдельной реализации эквивалентно соответствующему усреднению по ансамблю реализаций.

Эргодичность случайного процесса

http://stu.alnam.ru/book_in_stat1-25

Эргодичность — специальное свойство изменяющейся (динамической) системы, состоящее в том, что в процессе эволюции системы почти каждая точка её с определённой правильностью проходит вблизи любой другой точки системы. Иными словами, система «забывает» своё начальное состояние и ведёт себя хаотически.

Преимущество эргодических динамических систем в том, что при достаточном времени наблюдения такие системы можно описывать статистическими методами. С другой стороны, долгосрочное предсказание эргодических систем невозможно — небольшая ошибка измерений приведёт к серьёзному расхождению реальной траектории с предсказанной.

Эргодическая теория — один из разделов общей динамики.

Свойство эргодичности, о котором далее пойдет речь, важно потому, что при его наличии имеют место чрезвычайно существенные соотношения между функцией распределения и временем пребывания случайной функции $\xi(t)$ в определенном интервале значений, между статистическими средними и средними по времени.

Функции распределения, согласно «аксиоме измерения» вероятности, имеют статистический смысл. Это относительные частоты в ансамбле одинаковых систем, т. е. систем, в каждой из которых воспроизведены одни и те же условия протекания данного случайного процесса и одни и те же способы его регистрации или наблюдения. Если, например, речь идет о флуктуациях, то одинаковыми должны быть макроскопические

характеристики всех систем, составляющих ансамбль. Имея ансамбль систем, мы располагаем обширным набором реализаций рассматриваемой [случайной функции](#) $\xi(t)$ и с помощью соответствующих [вероятностей](#), т. е. распределений систем ансамбля по возможным значениям $\xi(t)$ можем находить м.о. $\xi(t)$, $\varphi(t_1, t_2)$ и т. д.

Теоретики любят оперировать с ансамблями, но у экспериментаторов обычно одна лаборатория и одна установка, а не 10^6 или 10^9 . За данный промежуток времени $(0 - T)$ экспериментатор может получить лишь одну реализацию интересующего его [случайного процесса](#) и предпочитает поэтому усреднять по времени, пользуясь одной реализацией $\xi(t)$ одной осциллограммой или аналогичным образцом. Спрашивается, в каком соотношении находятся эти способы усреднения по времени и по ансамблю?

Забегая вперед, укажем уже теперь, что для [стационарных процессов](#), обладающих свойством эргодичности, оба способа усреднения при достаточно больших T практически совпадают, так как в этом случае стационарная [вероятность](#) состояния равна относительному времени пребывания системы в данном состоянии. Соответственно среднее статистическое равно среднему по достаточно большому промежутку времени. Говоря «равно» или «совпадает», мы, конечно, допускаем неточность, так как речь идет лишь о вероятностной сходимости **по вероятности, в среднем квадратичном или почти наверное**.

Эти утверждения более точно сформулированы и доказаны в ряде работ.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T f[\xi(t)] dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_T(x) dx \right| = 0 \text{ (по вер.)}, \quad (21.13)$$

где $p_T(x)$ дается формулой «эффективной» плотности [вероятности](#)

$$p_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \omega_1(t, x) dt. \quad (21.14)$$

Первый интеграл в (21.13) это эмпирическая величина, получаемая в результате определенной обработки осциллограммы $f[\xi(t)]$ в интервале $(0 - T)$. Вместе с тем это [случайная величина](#), различная для разных реализаций $\xi(t)$ в интервале $(0 - T)$, а $\omega_1(t, x)$ – одномерная и плотность вероятностей $\xi(t)$.

Можно сказать, что это закон больших чисел в применении к непрерывному наблюдению.

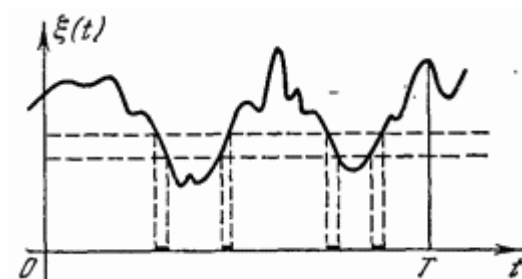


Рис. 21.1

Докажем теперь, что при условии того, что имела место сходимость в среднем квадратичном, относительное время пребывания $\xi(t)$ в промежутке $(x, x+dx)$ сходится по вероятности при $T \rightarrow \infty$ к $p_\infty(x)dx$, где

$$p_\infty(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} p_T(x), \quad (21.15)$$

если, конечно, этот предел существует. Относительным временем пребывания называется отношение суммарного времени $T_{(x, x+dx)}$, проведенного $\xi(t)$ в промежутке $(x, x+dx)$, т. е. суммы всех отмеченных на рис. 21.1 жирной линией отрезков оси абсцисс от момента 0 до момента T , к полной продолжительности интервала T .

Теорема же (21.13) принимает теперь вид

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T_{(x, x+dx)}}{T} - p_T(x) dx \right\} = 0. \quad (21.16)$$

Все сказанное справедливо для случайного процесса $f[\xi(t)]$, удовлетворяющего условию сходимости в среднем квадратичном — так называемому условию эргодичности этого процесса. Необходимое и достаточное условие сходимости в среднем квадратичном можно заменить более сильными требованиями — достаточными условиями эргодичности, которые в приложениях теории большей частью оказываются выполненными. Например, условие сходимости в среднем квадратичном будет удовлетворено, если функция корреляции всюду ограничена и при всяком t убывает с увеличением Δt .

Лекции 22,23 Методы вычисления надежности и коэффициентов запаса. Выбор нормативного коэффициента запаса. Коэффициенты запаса в практических расчетах

Основные методы вероятностного расчета строительных конструкций

При проектировании строительных конструкций представляется весьма важным установить соответствие расчетной модели действительной работе конструкций в эксплуатации и правильно учитывать изменчивость случайных факторов. Расчет начинается с анализа структурной схемы сооружения и распределений несущей способности и внешних воздействий. Отсутствие отказов характеризуется тем, что усилия от нагрузок F не превышают несущую способность Φ , т. е. $\Phi - F > 0$ и $\Phi/F > 1$.

В силу случайной природы прочности и нагрузок эти условия не могут быть выполнены абсолютно точно; оно соблюдается с некоторой вероятностью, достаточно близкой к единице, в течение срока службы сооружения. По мере развития теории надежности предлагались различные методы расчета надежности строительных конструкций.

Метод А.Р. Ржаницына

По методу А.Р. Ржаницына [5] условие недопустимости достижения опасного состояния конструкции и основания представляется в форме (рис. 22.1)

$$\psi = \Phi - S \geq 0 \quad (22.1)$$

где ψ — функция неразрушимости.

Функция неразрушимости зависит от многих случайных параметров q_i , и возникающие трудности построения кривых распределений нагрузки и несущей способности (прочности) преодолеваются тем, что эти кривые распределения принимаются за нормальные или логнормальные.

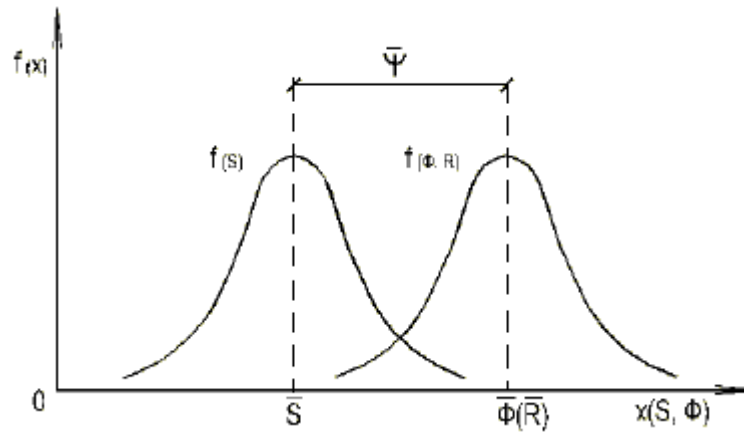


Рис. 22.1. Плотности распределения $f(S)$ и $f(\Phi, R)$

Если $\Phi(R)$ и S распределены по нормальному закону, функция распределения плотности вероятностей $f(\Psi)$ имеет вид:

$$f(\Psi) = \frac{1}{\sigma_{\Psi} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\Psi - \bar{\Psi})^2}{2\sigma_{\Psi}^2}\right], \quad (22.2)$$

где $\bar{\Psi}$ и σ_{Ψ} – математическое ожидание и стандарт для Ψ .

При этом

$$\bar{\Psi} = \bar{\Phi}(\bar{R}) - \bar{S}; \quad (22.3)$$

$$\sigma_{\Psi}^2 = \sigma_{\Phi(R)}^2 - 2K_{\Phi, S} + \sigma_S^2, \quad (22.4)$$

где $K_{\Phi, S} = \left[\frac{\Phi(R) - \bar{\Phi}(\bar{R})}{\Phi^{\circ}(R^{\circ})}\right] \left[\frac{(S - \bar{S})}{S^{\circ}}\right]$ – коэффициент корреляции; $\Phi^{\circ}(R^{\circ})$ – центрированная случайная величина $\Phi(R)$;

S° – центрированная случайная величина S ;

$\bar{\Phi}(\bar{R}), \bar{S}$ – математическое ожидание для Φ, R и S ;

$\sigma_{\Phi(R)}, \sigma_S$ – стандарт для Φ, R и S .

Если $\Phi(R)$ и S – независимые случайные величины, то

$$K_{\Phi, S} = 0 \text{ и } \sigma_{\Psi}^2 = \sigma_{\Phi(R)}^2 + \sigma_S^2. \quad (22.5)$$

Надежность конструкции и основания по прочности определяется характеристикой безопасности γ , которая является обратной величиной по отношению к коэффициенту изменчивости распределения Ψ :

$$\gamma = \frac{\bar{\Psi}}{\sigma_{\Psi}} = \frac{1}{V_{\Psi}} = \frac{\bar{\Phi(R)} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_{\Phi(R)}^2 + \sigma_S^2}}, \quad (22.6)$$

где $\bar{\Psi}, \bar{\Phi(R)}, \bar{S}$ – математические ожидания соответствующих распределений; $\sigma_{\Psi}, \sigma_{\Phi(R)}, \sigma_S$ – стандарты распределений; V_{Ψ} – коэффициент вариации (изменчивости) для распределения Ψ .

Определив γ , можно оценить вероятность отказа Q или $P(+)$ безотказной [работы](#) конструкции и основания с помощью выражений:

$$Q = P(\psi \geq 0) = \int_{-\infty}^{\gamma} f(\Psi) d\Psi = 0,5 - \Phi(\gamma); \quad (22.7)$$

$$P(+) = 1 - Q = 0,5 + \Phi(\gamma). \quad (22.7)$$

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\frac{x^2}{2}} dx -$$

Здесь функция Лапласа, значения которой табулированы. При этом необходимо учитывать, что $\Phi(\gamma)$ – нечетная функция, для которой $\Phi(-\gamma) = -\Phi(\gamma)$.

Между характеристикой безопасности γ и надежностью конструкции и основания $P(+)$ существует зависимость: чем больше величина γ , тем выше надежность. Например, при $\gamma = 1,28$ $P(+) = 0,90$; при $\gamma = 2,32$ $P(+) = 0,99$; при $\gamma = 3,15$ $P(+) = 0,999$.

Математическое ожидание и стандарт величины Ψ определяются на основании нормативных (средних) значений нагрузок и прочности материала конструкций и грунта основания, коэффициентов вариации $V_{R,S}$, необходимых для определения $\sigma_{R,S}$ по условиям $\sigma_{R,S} = (\bar{R}, \bar{S}) V_{R,S}$.

При логарифмически нормальном законе распределения $\Phi(R), S, \psi$, когда $V_{\Phi(R),S} > 0,15 - 0,20$ характеристика безопасности определяется с помощью выражения

$$\gamma = \frac{\ln \frac{\bar{\Phi}(\bar{R})}{\bar{S}} - 0,5 \ln \frac{(1 + V_{\Phi,R}^2)}{(1 + V_S^2)}}{\sqrt{\ln[(1 + V_{\Phi,R}^2)(1 + V_S^2)]}}, \quad (22.8)$$

где $V_{\Phi,R}, V_S$ – коэффициенты вариации соответствующих распределений.

А.Р. Ржаницын рассмотрел также расчет надежности конструкций при воздействии нагрузок, представляющих собой случайные процессы [3].

Если совместное распределение случайных параметров q_i , характеризующих нагрузку, условия эксплуатации и внутренние свойства конструкции, отличается от нормального или логнормального, то надежность может быть определена по формуле типа (22.7), в интеграле которой $P(+) = 1 - \int \Psi$, $\Psi = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$ – совместная плотность распределения случайных параметров и интегрирование проводится по всем q_i .

Строго говоря, формулы (22.8), (22.7) пригодны для случая однократного дискретного нагружения. К таким случаям можно отнести натяжение напрягаемой арматуры железобетонных мостовых конструкций, создание преднапряженных металлических конструкций, воздействие тяжелых монтажных нагрузок на пролетные строения мостов и др.

Для оценки надежности системы основание–сооружение по различным предельным состояниям рассмотрим решение, предложенное Н.Н. Ермолаевым. При этом для дальнейших выкладок неравенство (22.1), заменив в нем буквенные обозначения, представим в виде:

$$Y = Y_1 - Y_2 \geq 0, \quad (22.9)$$

где Y – совокупный фактор, являющийся функцией случайных аргументов, определяющих числовые характеристики как "внутреннего" фактора Y_1 , так и "внешнего" фактора Y_2 ; Y_1 – "внутренний" фактор системы сооружение–основание, характеризующий ее несущую способность или предельно допустимую деформацию; Y_2 – "внешний" фактор условий [работы](#) системы, характеризующий фактически действующие нагрузки при их наиболее невыгодном сочетании и обуславливающий наиболее тяжелые условия работы системы в отношении возможности потери несущей способности грунтовым основанием или появления наибольших деформаций.

Учитывая выражение (22.9) и содержание понятия уровня надежности, соотношение для получения количественного показателя надежности системы основание–сооружение можно представить в виде:

$$H = R_H = P[Y \geq y = 0] = P[(Y_1 - Y_2) \geq y = 0], \quad (22.10)$$

где $H = R_H = P[Y \geq y = 0]$ – вероятность события, заключающегося в ненаступлении предельных состояний для системы основание–сооружение, численно равная уровню надежности системы.

Так как наибольший практический интерес представляет предельное значение надежности, получаемое при наименьших затратах, то соотношение (22.10) для указанных условий может быть записано в виде:

$$H = R_H = P[Y = y = 0] = P[Y_1 - Y_2 = y = 0]. \quad (22.11)$$

Для определения уровня надежности в общем случае необходимо знание плотности $f_Y(y)$ или функции $F_Y(y)$ распределения совокупной величины Y , являющейся функцией многих случайных аргументов, от которых зависят факторы Y_1 и Y_2 .

Применительно к случайной величине Y , имеем

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[-\infty < Y < y]. \quad (22.12)$$

Учитывая, что

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy, \quad (22.13)$$

а также равенство (22.11), для уровня надежности H получаем:

$$\left. \begin{aligned} H = P_n = 1 - F_Y(y=0), \\ H = P_n = 1 - \int_{-\infty}^{y=0} f_Y(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (22.14)$$

Как правило, закон распределения фактора Y будет в достаточной мере сложным, если учесть множество случайных факторов, стоящих в правой части соотношения (22.9), от которых он зависит. Поэтому Н.Н. Ермолаев использовал приближенное соотношение в виде ряда Шарлье. В общем случае при $Y \neq 0$, учитывая три первых члена ряда, получим

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy = \frac{1}{2} [\Phi_Z(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y})] - \frac{1}{3!} \frac{\mu_{3Y}}{\sigma_Y^3} \Phi_o^{(2)}(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}) + \\ + \frac{1}{4!} (\frac{\mu_{4Y}}{\sigma_Y^4} - 3) \Phi_o^{(3)}(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}), \end{aligned} \quad (22.15)$$

где $Z = (Y - m_Y) / \sigma_Y$ – нормированная случайная величина Z ,

соответствующая случайной величине Y ; $\Phi_o(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$ – плотность нормального распределения случайной величины Z ;

$\Phi_Z(Z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ – интеграл вероятностей (удвоенная функция Лапласа), определяемый для каждого из значений $Z = (Y - m_Y) / \sigma_Y$

$\Phi_o^{(2)}(Z) = \Phi_o^{(2)}(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y})$, $\Phi_o^{(3)}(Z) = \Phi_o^{(3)}(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y})$ – вторая и третья производные, определяемые по специальным таблицам для каждого заданного значения $Z = (Y - m_Y) / \sigma_Y$; μ_{3Y} , μ_{4Y} – третий и четвертый центральные моменты случайной величины совокупного фактора Y ; $\sigma_Y = \sqrt{D_Y}$ – среднее квадратическое отклонение фактора Y .

Так как для определения уровня надежности H , согласно (22.14), $y = 0$, то по формуле (22.15)

$$F_Y(y=0) = \int_{-\infty}^0 f_Y(y) dy = \\ = \frac{1}{2} [1 + \Phi_Z(-\frac{m_Y}{\sigma_Y})] - \frac{1}{3!} \frac{\mu_{3Y}}{\sigma_Y^3} \varphi_o^{(2)}(-\frac{m_Y}{\sigma_Y}) + \frac{1}{4!} (\frac{\mu_{4Y}}{\sigma_Y^4} - 3) \varphi_o^{(3)}(-\frac{m_Y}{\sigma_Y}) + \dots \quad (22.16)$$

Подставив в соотношение (22.14) выражение для $F_Y(y=0)$, получаем:

$$H = R_H = \frac{1}{2} [1 - \Phi_Z(-\frac{m_Y}{\sigma_Y})] + \frac{1}{3!} \frac{\mu_{3Y}}{\sigma_Y^3} \varphi_o^{(2)}(-\frac{m_Y}{\sigma_Y}) - \\ - \frac{1}{4!} (\frac{\mu_{4Y}}{\sigma_Y^4} - 3) \varphi_o^{(3)}(-\frac{m_Y}{\sigma_Y}) + \dots \quad (22.17)$$

Учитывая, что $\Phi_Z(z)$ и $\varphi_o^{(3)}(z)$ являются нечетными функциями, а $\varphi_o^{(2)}(z)$ – четной, получим:

$$\Phi_Z(z) = -\Phi_Z(-z); \quad \varphi_o^{(2)}(-z) = \varphi_o^{(2)}(z); \quad \varphi_o^{(3)}(-z) = -\varphi_o^{(3)}(z).$$

Тогда для уровня надежности H получаем следующее выражение:

$$H = \frac{1}{2} [1 + \Phi_Z(\frac{m_Y}{\sigma_Y})] + \frac{1}{3!} \frac{\mu_{3Y}}{\sigma_Y^3} \varphi_o^{(2)}(\frac{m_Y}{\sigma_Y}) + \\ + \frac{1}{4!} (\frac{\mu_{4Y}}{\sigma_Y^4} - 3) \varphi_o^{(3)}(\frac{m_Y}{\sigma_Y}) + \dots \quad (22.18)$$

Вводя коэффициент вариации случайной величины $\frac{1}{V_Y} = \frac{m_Y}{\sigma_Y}$ и обозначая $A_Y = \frac{\mu_{3Y}}{\sigma_Y^3}$, $E_Y = (\frac{\mu_{4Y}}{\sigma_Y^4} - 3)$, получим выражение для определения расчетного уровня надежности:

$$H_P = H = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi_Z \left(\frac{1}{V_Y} \right) \right] + \frac{A_Y}{6} \Phi_o^{(2)} \left(\frac{1}{V_Y} \right) + \frac{E_Y}{24} \Phi_o^{(3)} \left(\frac{1}{V_Y} \right) + \dots, \quad (22.19)$$

где A_Y , E_Y – асимметрия и эксцесс фактора Y .

Имея в виду выражение (22.9), для определения числовых характеристик функции Y , являющейся разностью двух независимых случайных величин, получаем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} m_Y &= m_{Y_1} - m_{Y_2}, \\ D_Y &= \sigma_Y^2 = D_{Y_1} + D_{Y_2} = \sigma_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_2}^2, \\ \mu_{3Y} &= \mu_{3Y_1} - \mu_{3Y_2}, \\ \mu_{4Y} &= \mu_{4Y_1} + \mu_{4Y_2} + 6D_{Y_1}D_{Y_2}, \end{aligned} \right\} \quad (22.20)$$

где m_{Y_1} , m_{Y_2} , σ_{Y_1} , σ_{Y_2} , D_{Y_1} , D_{Y_2} , μ_{3Y_1} , μ_{3Y_2} , μ_{4Y_1} , μ_{4Y_2} – соответственно математические ожидания, среднеквадратические отклонения, дисперсии и центральные моменты третьего и четвертого порядка факторов Y_1 и Y_2 как случайных величин. Указанные числовые характеристики определяются как характеристики функций случайных аргументов, от которых они зависят.

Для практических приложений в проектировании транспортных сооружений чрезвычайно важным является вопрос обеспечения требуемой надежности при возможности варьирования несущей способностью Φ (“внутренним” фактором Y_1) в соотношениях (22.1) и (22.9), которые отображают совокупность прочностных или деформативных показателей материала конструкций и грунтов основания, с учетом вида их напряженного состояния и геометрических размеров конструкции и фундамента.

Согласно существу вероятностного толкования понятия надежности, коэффициент запаса $K_{ЗАП}$ (коэффициент надежности $K_{НГ}$) в [работе](#) конструкции при расчете на прочность или устойчивость, а также при условии, что $\Phi(R)$ и S распределены по нормальному закону, определяется по формуле $K_{зап} = \frac{\bar{\Psi}}{S}$.

Учитывая, что $\bar{\Psi} = \bar{\Phi} - \bar{S}$, можно получить условие

$$\frac{\bar{\Psi}}{\bar{S}} = \frac{\bar{\Phi}}{\bar{S}} - 1 = K_{\text{зАП}} - 1, \quad (22.21)$$

откуда

$$K_{\text{зАП}} = 1 + \frac{\bar{\Psi}}{\bar{S}}, \quad (22.22)$$

где $\bar{\Psi}, \bar{\Phi}, \bar{S}$ – математические ожидания соответствующих факторов.

Имея соотношения (22.21), (22.22) и учитывая, что $\sigma_{\Psi}^2 = \sigma_{\Phi}^2 + \sigma_S^2$, можно определить характеристику безопасности γ по формуле (22.6) через коэффициент запаса $K_{\text{зАП}}$ в виде:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{V_{\Psi}} \frac{(\bar{\Phi} - \bar{S}) / \bar{S}}{\sqrt{(\sigma_{\Phi}^2 / \bar{S}^2) + (\sigma_S^2 / \bar{S}^2)}} = \frac{K_{\text{зАП}} - 1}{\sqrt{(\sigma_{\Phi}^2 \bar{\Phi}^2 / \bar{S}^2 \bar{\Phi}^2) + (\sigma_S^2 / \bar{S}^2)}} = \\ &= \frac{K_{\text{зАП}} - 1}{\sqrt{V_{\Phi}^2 K_{\text{зАП}}^2 + V_S^2}}. \end{aligned} \quad (22.23)$$

Решая выражение (22.23) относительно коэффициента запаса $K_{\text{зАП}}$, получим

$$K_{\text{зАП}} = \frac{1 + \sqrt{1 - (\gamma^2 V_{\Phi}^2 - 1)(\gamma^2 V_S^2 - 1)}}{(1 - \gamma^2 V_{\Phi}^2)}. \quad (22.24)$$

При логнормальном распределении Φ и S коэффициент запаса $K_{\text{зАП}}$ получит выражение:

$$\ln K_{\text{зАП}} = \gamma \sqrt{\ln[(1 + V_{\Phi}^2)(1 + V_S^2)]} + 0,5 \ln \frac{1 + V_{\Phi}^2}{1 + V_S^2}, \quad (22.25)$$

где γ – характеристика безопасности, определяемая по формуле (22.8).

Уровень надежности $H = P(+)$ при нормальном и логнормальном распределениях факторов Φ и S устанавливается по формуле (22.7).

При экспоненциальном законе распределения Φ и S выражение коэффициента запаса $K_{зАП}$ с использованием условия $K_{зап} = \frac{\bar{\Psi}}{\bar{S}}$, получит следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{V_\psi} = \frac{K_{зАП} - 1}{(K_{зАП}^2 + 1)^{1/2}}, \\ K_{зАП} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)^2}}{(\gamma^2 - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

Для оценки уровня надежности $H = P(+)$ в этом случае получено следующее выражение:

$$\begin{aligned} H = P(+) &= \frac{1}{2}[1 + \Phi(\gamma)] + \frac{1}{3} \frac{(\bar{\Phi}^3 - \bar{S}^3)}{(\bar{\Phi}^2 + \bar{S}^2)^{3/2}} \Phi_o^{(2)}(\gamma) + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(\bar{\Phi}^4 + \bar{S}^4)}{(\bar{\Phi}^2 + \bar{S}^2)^2} \Phi_o^{(3)}(\gamma) + \dots, \end{aligned} \quad (22.27)$$

где $\Phi(\gamma)$ – интеграл вероятности (функция Лапласа);

$\Phi_o^{(2)}(\gamma)$, $\Phi_o^{(3)}(\gamma)$ – вторая и третья производные, определяемые по специальным таблицам [4];

$\bar{\Phi}, \bar{S}$ – математическое ожидание соответствующих экспоненциальных распределений;

V_ψ – коэффициент вариации совокупного случайного фактора,

$$V_\psi = (\bar{\Phi}^2 + \bar{S}^2)^{1/2} / (\bar{\Phi} - \bar{S}).$$

При расчете грунтовых оснований на прочность по способу Н.Н. Ермолаева нормированная случайная величина Z определяется по аналогии с выражением (22.23) и имеет следующий вид:

$$Z = \frac{m_y}{\sigma_y} = \frac{1}{V_y} = \frac{K_{3АП} - 1}{\sqrt{V_{y1}^2 K_{3АП}^2 + V_{y2}^2}}. \quad (22.28)$$

Решая соотношение (22.28) относительно $K_{3АП}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} K_{3АП} &= \frac{1 - \sqrt{1 - (Z^2 V_{y2}^2 - 1)(Z^2 V_{y1}^2 - 1)}}{(1 - Z^2 V_{y1}^2)}, \\ K_{3АП} &= \frac{1 - \sqrt{1 - (\frac{V_{y2}^2}{V_y^2} - 1)(\frac{V_{y1}^2}{V_y^2} - 1)}}{(1 - \frac{V_{y1}^2}{V_y^2})}. \end{aligned} \right\} \quad (22.29)$$

Подставив в правую часть соотношения (22.19) для определения уровня надежности вместо $1/V_y = Z$ его выражение (22.28), имеем:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} [1 + \Phi_Z \left(\frac{K_{3АП} - 1}{\sqrt{V_{y1}^2 K_{3АП}^2 + V_{y2}^2}} \right) + \frac{A_y}{6} \Phi_o^{(2)} \left(\frac{K_{3АП} - 1}{\sqrt{V_{y1}^2 K_{3АП}^2 + V_{y2}^2}} \right) + \\ & + \frac{E_y}{24} \Phi_o^{(3)} \left(\frac{K_{3АП} - 1}{\sqrt{V_{y1}^2 K_{3АП}^2 + V_{y2}^2}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (22.30)$$

Как показывают численные расчеты по формулам (22.16), (22.18), (22.19) влияние членов расчетных соотношений для определения надежности, зависящих от третьего и четвертого центрального моментов, обычно не превосходит нескольких процентов. Это влияние тем меньше, чем больше коэффициент запаса и чем меньше коэффициент вариации физико-механических свойств грунтовых оснований. Поэтому для грубых прикидочных расчетов можно использовать указанные формулы без учета третьего и четвертого членов. В этом случае

$$H = H_p = \frac{1}{2} [1 + \Phi_Z \left(\frac{m_y}{\sigma_y} \right)] = \frac{1}{2} [1 + \Phi_Z \left(\frac{1}{V_y} \right)], \quad (22.31)$$

где $\Phi_Z \left(\frac{1}{V_y} \right)$ – удвоенный интеграл Лапласа.

Использование формулы (22.31) равносильно принятию для совокупного фактора Y нормального закона распределения.

Использование соотношений (22.7), (22.23); (3.10), (22.25); (22.26), (22.27), (22.30) при различных законах распределения факторов Φ и $S(Y_1$ и σ_{Y_2} , позволяет решать следующие практически важные задачи:

1) определять уровень надежности $H = P(+)$ при заданных коэффициентах запаса $K_{зап}$, числовых характеристиках случайных величин Φ и $S(Y_1$ и $Y_2)$ и их коэффициентах вариации;

2) определять требуемый коэффициент запаса для обеспечения заданного уровня надежности конструкции или грунтового основания при известных числовых характеристиках случайных величин Φ и $S(Y_1$ и $Y_2)$ и их коэффициентах вариации.

Каждая из указанных задач имеет свою область преимущественного использования. Решение первой задачи представляет большой интерес при оценке уровня надежности существующих эксплуатируемых конструкций и грунтовых оснований сооружений. Решение второй задачи имеет преимущественное значение в стадии проектирования конструкций и грунтовых оснований сооружений.

Лекция 23. Методы вычисления надежности и коэффициентов запаса. Выбор нормативного коэффициента запаса. Коэффициенты запаса в практических расчетах.

Метод Н. С. Стрелецкого

Им впервые исследовались совместно вероятностные распределения нагрузки F и несущей способности Φ . Отсутствие отказов характеризуется тем, что усилия от нагрузок F не превышают несущую способность Φ , т. е.

$$\Phi - F > 0 \text{ и } \Phi / F > 1 \quad (23.1)$$

Пусть кривая распределения прочности характеризуется математическим ожиданием $\bar{\Phi}$ и среднеквадратичным отклонением $\hat{\Phi}$, а кривая распределения усилия от нагрузки — соответственно \bar{F} и \hat{F} . Эти кривые пересекаются в одной точке, соответствующей несущей способности Φ_0 и усилию от нагрузки — F_0 (рис. 23.1). Значения $\Phi_0 = F_0$ зависят от общего коэффициента запаса и могут быть приняты за расчетные.

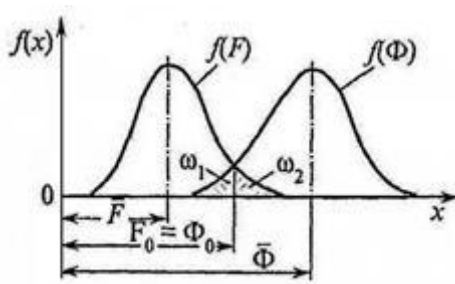


Рис. 23.1. К определению «гарантии неразрушимости»

Для оценки безопасной работы конструкции Н. С. Стрелецкий ввел понятие «гарантия неразрушимости» и дал простой способ ее определения:

$$\Gamma = 1 - \omega_1 \omega_2, \quad (23.2)$$

где Γ – гарантия неразрушимости (вероятность безотказной работы);

ω_1 – вероятность того, что прочность конструкции получит заниженные значения $\Phi < \Phi_0$;

ω_2 – вероятность того, что нагрузка получит завышенное значение, т. е. $F > F_0$;

$\omega_1 \omega_2$ – вероятность одновременного появления этих событий (вероятность отказа).

В такой трактовке отказ происходит при одновременном появлении двух событий: снижения несущей способности ниже расчетной и превышения нагрузками расчетной величины.

Вероятности ω_1 и ω_2 нетрудно вычислить, если известны законы распределения нагрузки и несущей способности. Они равны площадям криволинейных треугольников, заключенных между осью абсцисс и отрезками кривых в диапазоне от Φ_0 до $-\infty$ для распределения несущей способности и от F_0 до $+\infty$ для распределения нагрузок:

$$\omega_1 = \int_{-\infty}^{\Phi_0} f(\Phi) d\Phi, \quad \omega_2 = \int_{F_0}^{+\infty} f(F) dF. \quad (23.3)$$

На практике для вычисления ω_1 и ω_2 используются таблицы интеграла вероятностей.

Однако гарантия неразрушимости служит примерной и завышенной оценкой вероятности безотказной работы, так как не учитывает все возможные сочетания нагрузок и несущей способности. Впоследствии была дана двусторонняя оценка для вероятности отказа $Q=1-\Gamma$:

$$\omega_1 \omega_2 < Q < \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \omega_2, \quad (23.4)$$

если обе кривые распределения имеют по одному максимуму.

Пример 23.1. Оценить вероятность отказа изгибаемой балки при следующих исходных данных: $\bar{\Phi} = 280$ кНм, $\bar{\Phi} = 20$ кНм ,

$\bar{F} = 180$ кНм, $F = 20$ кНм. Пересечение двух распределений находится в точке $\Phi_0 = F_0 = 240$ кНм; распределения Φ и F нормальные.

Вычисляем вероятности ω_1 и ω_2 , используя функции Лапласа:

$$u_{\Phi} = \frac{\bar{\Phi} - \Phi_0}{\bar{\Phi}} = \frac{280 - 240}{20} = 2; \quad u_F = \frac{F_0 - \bar{F}}{\bar{F}} = \frac{240 - 180}{20} = 3.$$

Зная u_{Φ} и u_F по таблицам интеграла вероятностей находим, что $\omega_1 = 0,0028$, $\omega_2 = 0,00135$.

Двусторонние оценки вероятности отказа

$$\omega_1 \omega_2 = 0,0028 \cdot 0,00135 = 0,00003,$$

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \omega_2 = 0,0028 + 0,00135 - 0,00003 = 0,00412.$$

Итак, $0,00003 < Q < 0,00412$

Двусторонние оценки для гарантии неразрушимости следующие: $0,97588 < \Gamma < 0,99997$.

Пример 23.2. Определить надежность железобетонного ригеля перекрытия.

Исходные данные:

математическое ожидание несущей способности ригеля

$$\bar{\Phi} = 220 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

коэффициент вариации распределения несущей способности

$$V_{\Phi} = 0,1;$$

математическое ожидание изгибающего момента от нагрузки.

$$\bar{F} = 130 \text{ кНм};$$

коэффициент вариации распределения изгибающего момента от нагрузки $V_F = 0,15$;

характеристика безопасности $\gamma_s = 3$;

нормативное значение надежности $P_n = 0,9987$

Стандарты распределений:

для несущей способности $\bar{\Phi} = \gamma_s \bar{F} = 0,1 \cdot 220 = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

для изгибающего момента от нагрузки $F = V_F \bar{F} = 0,15 \cdot 130 = 19,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$\gamma = \frac{220 - 130}{\sqrt{22^2 + 19,5^2}} = 3,06;$$

$\gamma > \gamma_n (3,06 > 3,0)$. Характеристике безопасности $\gamma = 3,06$ соответствует надежность $P_1 = 0,99889$, что выше нормативной $P_n = 0,9987$. Надежность работы ригеля при действии нагрузок считается обеспеченной.

Пример 23.3. При изготовлении железобетонных ригелей перекрытий приняты меры по повышению качества изделия. Бетон стал более однородным, а коэффициент вариации несущей способности снизился до значения $V_\Phi = 0,07$. Определить надежность работы ригеля и наметить пути снижения расхода конструктивных материалов. Данные для расчета принимаются такими же, как в примере 23.2, кроме значения V_Φ .

Стандарт распределения несущей способности

$$\bar{\Phi}_1 = \gamma_s \bar{F} = 0,07 \cdot 220 = 15,4 \text{ кНм}.$$

Характеристику безопасности можно определить по формуле (22.6):

$$\gamma = \frac{220 - 130}{\sqrt{15,4^2 + 19,5^2}} = 3,62;$$

Характеристике безопасности $\gamma = 3,62$ соответствует надежность $P_2 = 0,999885$,

Определим вероятность отказа для условий примеров 23.2 и 23.3:

при $V_\Phi = 0,1$ (пример 23.2) $Q_1 = 1 - P_1 = 1 - 0,99889 = 0,00111$;

при $V_\Phi = 0,07$ (пример 23.3) $Q_2 = 1 - P_2 = 1 - 0,999885 = 0,000115$;

Вероятность отказа в примере 23.3 уменьшилась в $\frac{0,0011}{0,00015} = 7,4$ раза после принятия технологических мер по повышению качества конструкции, что повысило ее надежность, которая превышает нормативное значение. В результате улучшения технологии изготовления создались условия для уменьшения расхода материалов при сохранении нормативной надежности. С этой целью найдем значение средней несущей $\bar{\Phi}^*$ с заданной нормативной надежностью:

$$\bar{\Phi}^* = F + \gamma \sqrt{\bar{\Phi}_1^2 + \bar{F}_1^2} = 130 + 3,0 \sqrt{15,4^2 + 19,5^2} = 204,54 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При несущей способности $\bar{\Phi}^* = 204,54 \text{ кН} \cdot \text{м}$ обеспечивается нормативная надежность, а расход материалов может быть снижен примерно на $\frac{\bar{\Phi} - \bar{\Phi}^*}{\bar{\Phi}} 100 = 7\%$

Способ В.В. Болотина

Строгий подход к расчету надежности строительных конструкций основан на учете фактора времени. Изменение нагрузок и несущей способности происходят с течением времени, а наступление опасного состояния возникает в результате постепенного накопления повреждений. Например, прочностные и деформативные свойства железобетонной конструкции таковы, что в течение периода эксплуатации в бетоне и арматуре развиваются процессы, изменяющие способность конструкции сопротивляться воздействиям нагрузок и влиянию окружающей среды. Колебания влажности, перепады температур с переходом через ноль, ползучесть бетона вызывают постепенное нарушение его структуры, что ухудшает эксплуатационные качества конструкции. Многократное повторное воздействие нагрузки приводит к развитию усталостных повреждений в металле и бетоне. Процессы коррозии стальных конструкций и арматуры в железобетоне снижают несущую способность. В то же время в начальной стадии нагружения происходит упрочнение бетона, и, следовательно, несущая способность железобетонной конструкции в начальный период эксплуатации может повышаться.

В основу метода В.В. Болотина положено предположение, что поведение конструкций описывается случайным процессом, а отказ рассматривается как случайный выброс характеристик напряженного состояния конструкции из области допустимых состояний.

Общая схема расчета надежности с учетом физических, технических и эксплуатационных аспектов состоит из четырех этапов.

На первом этапе устанавливается расчетная схема системы (сооружения) и внешние случайные воздействия на нее.

На втором этапе определяется стохастическое поведение системы при случайных воздействиях.

Третий этап заключается в выборе пространства и области допустимых состояний. За параметры качества могут приниматься значения напряжений, моментов, нормальных сил, перемещений моментов и другие факторы, характеризующие напряженное состояние конструкции. Область допустимых значений параметров устанавливается на основе технико-экономических соображений с учетом технологических и эксплуатационных требований.

На четвертом этапе рассчитывается функция надежности как дополнение до единицы вероятности случайного выброса за пределы допустимой области.

Область допустимых значений, особенно для железобетонных конструкций, носит случайный характер. Для расчета надежности конструкций, стохастические свойства которых описываются конечным числом параметров, применяется метод условных функций надежности. Сначала рассчитывается надежность внутренне детерминированной системы под действием внешних нагрузок, трактуемых как случайный процесс. Эта надежность называется условной надежностью. Она зависит от случайных параметров, характеризующих свойства системы, – механические свойства материалов, начальные дефекты, возможные отступления геометрических размеров от номинальных. Совместная плотность вероятностей $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этих параметров должна быть получена путем изучения и обобщения представительной статистической информации. Затем применяется формула полной вероятности для данной системы:

$$P(t) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} Q(F > \Phi / x_1, x_2, \dots, x_n; t) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (23.5)$$

Здесь $Q(F > \Phi / x_1, x_2, \dots, x_n; t)$ – условная вероятность того, что нагрузка F превышает несущую способность Φ при фиксированных значениях параметров прочности x_1, x_2, \dots, x_n за период времени t .

В частности, при нагрузках, описываемых стационарным гауссовским процессом, формула для определения надежности ансамбля конструкций приобретает вид:

$$P(t) = 1 - \frac{t}{2\pi} \frac{\hat{F}}{\bar{F}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \bar{F})^2}{2\bar{F}^2} \right] f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (23.6)$$

где $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функциональная зависимость несущей способности от случайных параметров x_1, x_2, \dots, x_n ;

\bar{F}, \hat{F} — математическое ожидание и стандарт процесса нагружения;

\hat{F} — стандарт скорости изменения процесса нагружения.

При наличии обширной исходной статистической информации и выборе критериев отказа задача определения надежности сводится к решению кратных интегралов (23.5), (23.6). Стремление к аналитическому выражению функции надежности связано с рядом допущений.

В работах [7], [8] предлагается рассматривать определение уровня надежности по следующей схеме. Сначала определяют надежность внутренне детерминированной системы под действием внешних случайных нагрузок, трактуемых как случайный процесс.

Эта надежность $P_0(r_1, r_2, \dots, r_n; t)$, называемая *условной надежностью*, зависит от параметров r_1, r_2, \dots, r_n , характеризующих внутренние свойства системы (механические свойства материалов, начальные дефекты и неправильности). Совместная плотность вероятностей $p(r_1, r_2, \dots, r_n)$ для этих параметров должна быть получена путём изучения достаточно больших выборок конструкций. Надежность системы $P(t)$ вычисляют по формуле полной вероятности

$$P(t) = \int \dots \int P_0(r_1, r_2, \dots, r_n, t) p(r_1, r_2, \dots, r_n) dr_1 dr_2 \dots dr_n. \quad (23.7)$$

Например, когда нагрузка характеризуется одним параметром $s(t)$, изменение которого представляет собой стационарный гауссовский процесс, а отказ наступает при нарушении неравенства $R \geq S$, условная надежность определяется приближенно как

$$P_0(t) \approx 1 - \frac{\omega_{\Phi} \Phi t}{2\pi} \exp \left[-\frac{(R - a_S)^2}{2\sigma_S^2} \right]. \quad (23.8)$$

Эта формула дает оценку снизу, пригодную при надёжности, близкой к единице. Если же причиной отказа является усталостное разрушение, то, учитывая малый разброс условной долговечности T_0 , можно записать

$$P_0(t) \approx \begin{cases} 1 & \text{при } t < T_0 \\ 0 & \text{при } t \geq T_0 \end{cases} \quad (23.9)$$

где T_0 определяют, например, как среднюю долговечность:

$$T = \frac{T_{\text{эфф}}}{\int_0^{\infty} \frac{\rho(S)dS}{N(S)}} \approx T_0 \quad (23.10)$$

Выбор нормативного коэффициента запаса

Нормативное значение вероятности безотказной работы строительной конструкции представляет собой величину, близкую к единице. Она устанавливается исходя из требований обеспечения безопасной работы технологического оборудования и людей, безопасности движения для транспортных сооружений и минимума общих затрат на строительные и эксплуатационные работы. Следует отметить, что эти требования экономически противоречивы.

Повышение надежности ведет к увеличению запасов несущей способности конструкции, которые не всегда могут реализовываться в течение срока эксплуатации и вызывают неоправданное удорожание. В то же время конструкции с уменьшенными размерами поперечных сечений несущих элементов и расходом материалов обладают сниженной надежностью.

Отказы конструкций приводят к различного рода ущербам. К ним относятся стоимость C_1 восстановления поврежденной конструкции и ее ремонта при эксплуатации, затраты C_2 на восстановление оборудования и других частей поврежденных сооружений, потери C_3 прибыли производства на время его остановки вследствие отказа. Значение нормативной надежности конструкции с экономической ответственностью, размер ущерба для которых может быть оценен в стоимостном выражении, устанавливается из условия минимума общих затрат на строительные и текущие работы при эксплуатации зданий и сооружений (рис. 23.2):

$$C = C_0(P) + C_3(P) \rightarrow \min, \quad (23.11)$$

где C – общая стоимость;

$C_0(P)$ – начальная строительная стоимость конструкции;

$C_3(P)$ – затраты в процессе эксплуатации, связанные с отказами конструкции и ее содержанием: $C_3(P) = C_1 + C_2 + C_3$

Оба слагаемых формулы (23.11) зависят от надежности P : с увеличением P возрастает $C_0(P)$, но снижаются эксплуатационные расходы $C_3(P)$ (см. рис. 23.2).

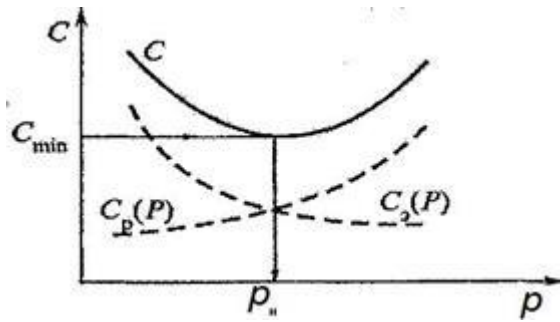


Рис. 23.2. Зависимость общей стоимости конструкции C от ее надежности P .

Инженерный расчет, как правило, носит детерминистический характер.

Условие безотказности $R \geq S$, которое может быть выполнено лишь с некоторой надёжностью P , заменяют детерминистическими условиями

$$k = \frac{R_{расч}}{S_{расч}} \geq k_{норм}$$

$$S_{расч} \leq \frac{R_{расч}}{k_{норм}} \quad (23.12)$$

Расчетное значение нагрузки $S_{расч}$ и расчетное значение прочности $R_{расч}$ выбирают до некоторой степени произвольно: это могут быть математические ожидания или наиболее вероятные значения, а также математические ожидания максимальных (минимальных) значений. После того как расчетные значения $S_{расч}$ и $R_{расч}$ установлены, **нормативный коэффициент запаса** $k_{норм}$ выбирают так, чтобы из приведенных выше условий с надёжностью P вытекало условие $R \geq S$. Отсюда видно, что если параметр внешних сил принимает детеминированное значение, то последнее естественно принять за расчетное. Тогда нормативный коэффициент запаса определяется как

$$k_{норм} = \frac{\bar{R}_{расч}}{R(P)},$$

где $R(P)$ – значение параметра прочности, такое, что вероятность осуществления неравенства $R \geq R(P)$ равна надежности P .

При нормальном распределении параметра R , принимая за $R_{расч}$ среднее значение R , получим $k_{норм} = \frac{1}{1 - \gamma \omega_R}$, здесь γ – гауссовский уровень надежности.

В общем случае, когда случайными являются и нагрузки и характеристики прочности, назначение нормативного коэффициента запаса становится весьма сложной задачей, требующей предварительного решения соответствующей задачи надёжности. Ориентировочно можно воспользоваться формулой (23.12) с учетом связи между надёжностью и коэффициентом запаса k , показанной на рис. 23.3.

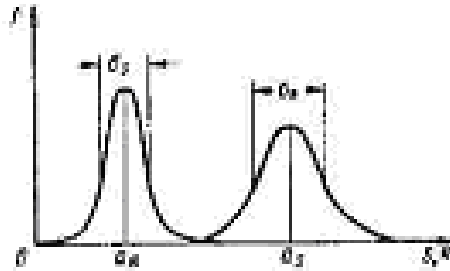


Рис. 23.3. Схема, иллюстрирующая связь между надёжностью и коэффициентом запаса k .

Определяя $k = \frac{a_R}{a_S}$, как отношение математических ожиданий (минимального значения прочности a_R и максимального значения нагрузки a_S) за время эксплуатации T , придём к следующей формуле, связывающей нормативный коэффициент запаса $k_{\text{норм}}$ с гауссовским уровнем надёжности γ

$$k_{\text{норм}} = \frac{1}{1 - \gamma^2 \omega_R^2} \left[1 + \sqrt{1 - (1 - \gamma^2 \omega_R^2)(1 - \gamma^2 \omega_S^2)} \right]. \quad (23.13)$$

На рис.23.4 дан график для нормативного коэффициента запаса при $\omega_R = \omega_S$.

Нормативный коэффициент запаса существенно зависит от нормативной надёжности $P_{\text{норм}}$, которую назначают на основании технико-экономических соображений.

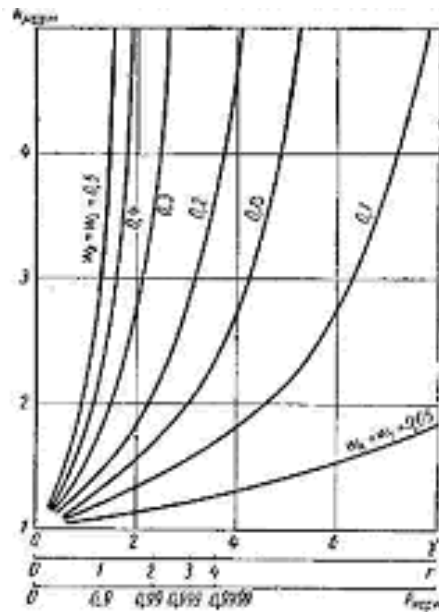


Рис. 23.4. Зависимость нормативного коэффициента запаса $k_{\text{норм}}$ от нормативной надежности $P_{\text{норм}}$ и от коэффициентов изменчивости при $\omega_R = \omega_S$.

Коэффициенты запаса в практических расчетах.

Объективные значения нормативных показателей надежности должны определяться для каждого отдельного вида строительных конструкций на основе глубоких теоретических разработок и обширных экспериментальных исследований.

В нашей стране на основе многолетней эксплуатации различных инженерных систем в зависимости от ответственности элемента, конструкции, объекта получены следующие данные нормативных значений надежности (табл. 23.1).

Значения гауссовского коэффициента надежности железобетонных конструкций, запроектированных по отечественным нормам, равны $\gamma_n = 3 \dots 4$. Надежность, соответствующая определенным значениям γ_n следующая:

Надежность 0,9 0,99 0,999 0,9999

Значения γ_n 1,28 2,33 3,10 3,76

Таблица 23.1.

Ориентировочные значения нормативной надежности γ_n

Элемент конструкции или сооружения	Начало эксплуатации	Окончание эксплуатации
Малоответственный элемент конструкции	0,90...0,95	0,85...0,90
Массовый статистически неопределимой конструкции, отказ которой не влечет внезапного разрушения системы	0,99	0,95
Ответственная конструкция (ферма, балка, колонна) с постепенными отказами	0,999	0,99
Ответственная конструкция с внезапными отказами	0,9999	0,999
Уникальное сооружение	0,99999	0,9999

Расчеты надежности и долговечности автодорожных мостов свидетельствуют, что оптимальная надежность зависит от срока службы и $P_n = 0,99...0,999$.

Оптимальное значение надежности составляет: по образованию трещины в защитном слое $P_n = 0,90...0,95$; по достижении трещинами нормативной ширины раскрытия $a = 0,2\text{мм}$, $P_n = 0,95$.

В инженерных нормах в качестве расчетной нагрузки принимают некоторое «максимальное» (т.е. соответствующее некоторой малой вероятности осуществления) значение, а в качестве расчетного сопротивления материала – нижнее значение из технических условий. Выбор этих значений, а также коэффициента запаса в определенной степени произволен: одной и той же надежности могут соответствовать различные коэффициенты запаса. Для того чтобы оценить величину надежности, предусматриваемой нормами, необходим статистический

анализ нагрузок, сопротивлений и других параметров, влияющих на поведение конструкции [8].

Диапазоны обычно принимаемых запасов прочности при расчетах от статических нагрузок и нагрузках с небольшим числом циклов 1,5 – 2,5 и 2 - 4 при переменных нагрузках с большим числом циклов.

В строительстве, в авиастроении и других отраслях, где одним из важнейших факторов является общий вес конструкции, логично стремление к обоснованному снижению запасов прочности. Это требует уточнения не только расчетных схем, но и уточнения сведений о нагрузках, условиях работы и механических свойствах материалов. В действующих ныне строительных нормах коэффициент запаса разделяется по типам нагрузок, неоднородности материалов и условиям работы.

При учете случайного характера всех факторов использование статистических данных часто ограничивает возможности обоснованного снижения запасов прочности в связи с недостаточной статистикой наблюдений. Поэтому для более обоснованного назначения коэффициентов запаса в настоящее время все шире используются методы моделирования процессов и методы статистического моделирования результатов как случайных величин и случайных процессов.

Лекция 24. Современные методы моделирования случайных процессов и величин при решении задач строительной механики расчета и проектирования сооружений

Общая характеристика методов моделирования случайных величин

Под моделированием случайной величины (СВ) ξ принято понимать процесс получения на компьютере ее выборочных значений ξ_1, \dots, ξ_N . Величины ξ_1, \dots, ξ_N статистически независимы и имеют одинаковое распределение вероятностей, совпадающее с распределением СВ ξ . Практически любая задача статистического моделирования содержит в качестве самостоятельного этапа получение реализаций СВ с заданными законами распределения.

Центральная предельная теорема теории вероятности.

Случайная величина, рассеивание значений которой обусловлено различными равнозначными причинами, имеет нормальный закон распределения вероятностей.

Исходным материалом для формирования на компьютере СВ с различными законами распределения служат равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$ случайные числа, которые вырабатываются на ЭВМ программным датчиком случайных чисел. Программы для получения псевдослучайных величин ξ с равномерным законом распределения входят в математическое обеспечение современных компьютеров и здесь не приводятся.

Основные методы моделирования СВ, применяемые при моделировании такие как методы нелинейного преобразования, суперпозиции, Неймана, кусочной аппроксимации дают общие приемы получения СВ с заданным законом распределения из равномерно распределенных случайных чисел и моделирования случайных процессов (СП).

Статистические запасы прочности

Прочность (способность детали сопротивляться разрушению) оценивается несколькими способами: а) с помощью допускаемых напряжений, б) запасами прочности, в) статистическими запасами прочности.

Статистические запасы прочности являются более обоснованными характеристиками прочностной надежности, в особенности для отказов конструкций с тяжелыми последствиями.

Статистические запасы прочности, как и обычные, имеют условное значение. Их используют как критерии сравнения надежности вновь создаваемых изделий с изделиями, удовлетворительно эксплуатируемыми. Параметры этих распределений однозначно связаны с математическим ожиданием, дисперсией и коэффициентом вариации, что позволяет сопоставить их особенности вдали от центра рассеяния. Для этого принимаются некоторые фиксированные значения $M(x)$ и $Q(x)$, определяются соответствующие параметры распределений и вычисляются вероятность разрушения и статистический запас прочности в сопоставимых условиях – одинаковых уровнях значимости и доверия при определении экстремальных расчетных значений предела выносливости и действующих напряжений.

Таким образом, задача цифрового моделирования СП формулируется как задача нахождения алгоритмов (по возможности наиболее простых), позволяющих получать на компьютере дискретные реализации (выборочные функции) моделируемых процессов. Это самостоятельная и довольно сложная задача синтеза дискретных СП, имитирующих непрерывные процессы с заданными статистическими характеристиками. Она решается путем отыскания удобных для реализации на компьютере линейных и нелинейных преобразований, с помощью которых можно

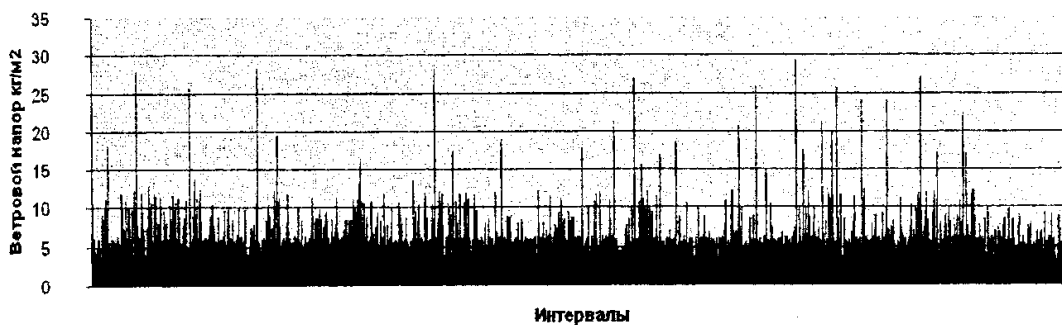
превратить независимые равномерно или нормально распределенные случайные числа, вырабатываемые датчиком случайных чисел, в случайные последовательности с требуемыми вероятностными свойствами.

Наиболее простой и практически пригодный метод определения статистических запасов прочности состоит в следующем. Минимальные характеристики прочности и максимальные значения напряжений устанавливают в соответствии с нормированным уровнем значимости и доверительной вероятности.

Виды отказов по вероятности возникновения за время эксплуатации	Ожидаемая вероятность отказов, оцененная расчетом или экспериментальным путем
Отказ практически невероятен	Менее 0,00005
Отказ маловероятен	От 0,00005 до 0,001
Отказ имеет малую вероятность, обусловленную только точностью расчета	От 0,001 до 0,005
Умеренная вероятность отказа	От 0,005 до 0,01
Отказы возможны, но при испытаниях или в эксплуатации аналогичных изделий не наблюдались	От 0,001 до 0,005
Отказы возможны, наблюдались при испытаниях и в эксплуатации аналогичных изделий	От 0,001 до 0,005
Отказы вполне вероятны	От 0,005 до 0,01
Высокая вероятность отказов	От 0,01 до 0,10
Вероятны повторные отказы	Более 0,1

Применение статистического моделирования СВ при расчетах строительных конструкций [6]:

Наименование параметра	Статистическое моделирование за 20 лет		Статистическое моделирование за 100 лет		Результаты наблюдений метеостанции г. Казань за 58 лет
	Нормальное усеченное распределение	Вейбулла распределение	Нормальное усеченное распределение	Вейбулла распределение	
Максимальная скорость ветра (м/с)	28.1	32.3	29.77	35.2	28-30
Максимальный ветровой напор (кг/м ²)	49.4	65.4	55.4	77.4	49-56
Количество случаев со скоростью более 27 м/с	5 случаев (50мин)	9 случаев (90мин)	16 случаев (160мин)	23 случая (230мин)	2 случая за 2007 и 2008г. (60мин)



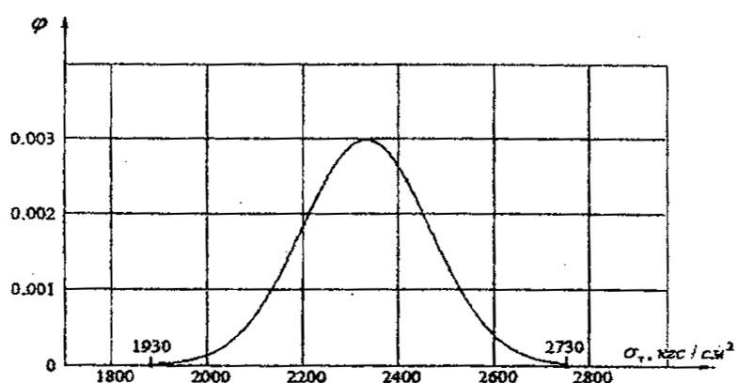
Гистограмма результатов моделирования ветрового напора законом распределения Вейбулла

Статистический имитационный метод [6]:

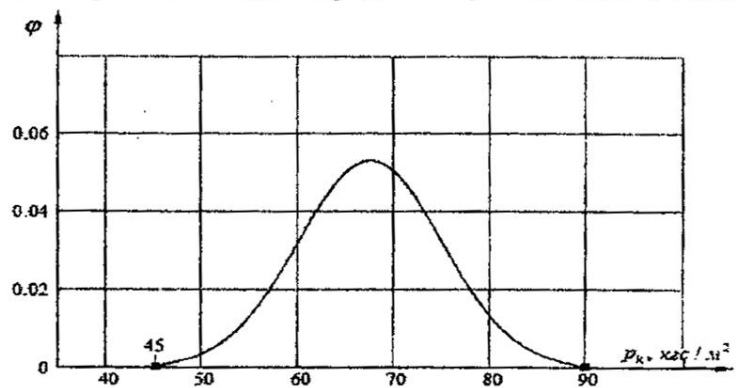
Статистический имитационный метод отличается от смешанных вероятностно-детерминированных методов тем, что все расчётные параметры, производные от параметров и функциональные преобразования выполняются статистическими методами моделирования.

При статистическом моделировании возможны различные варианты, из которых наиболее удобны:

1 – интервальное представление (задается функция распределения и предельные возможные значения случайных параметров (рис. 24.1)) ;



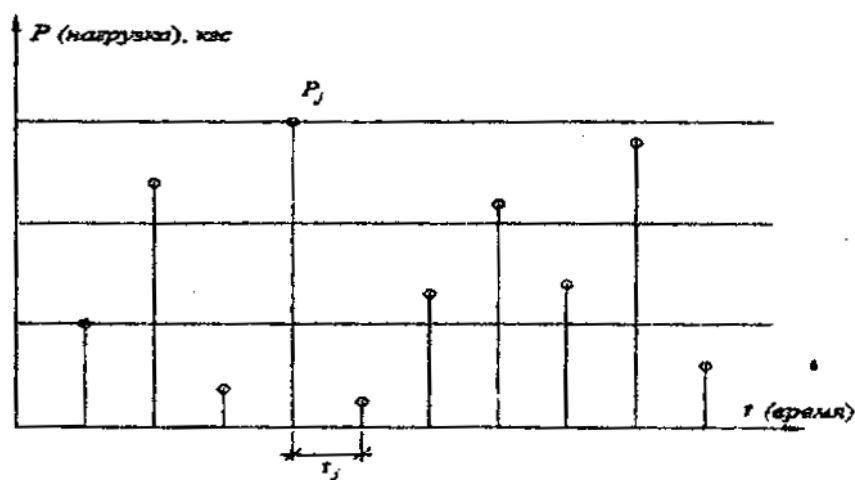
а) интервальная оценка предела текучести стали Вст3пс



б) интервальная оценка постоянной нагрузки от веса утеплителя кровли

Рис 24.1.

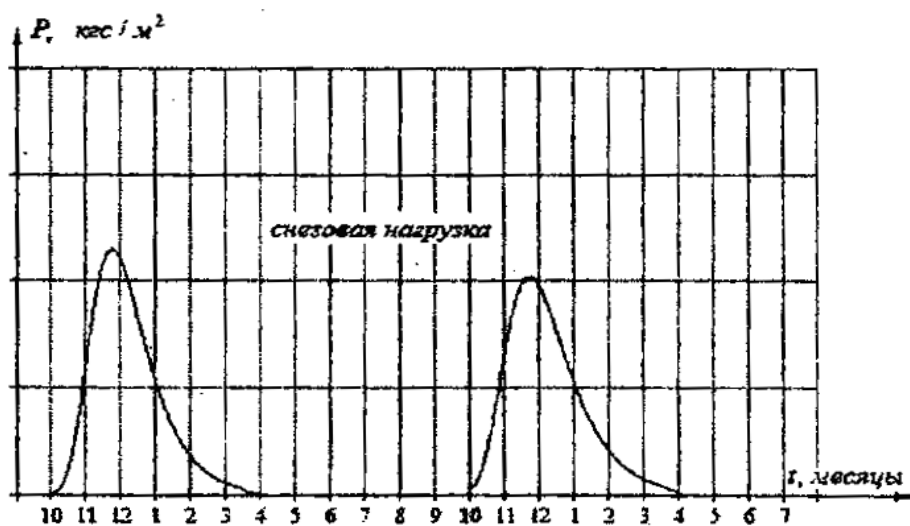
2 – представление в виде случайных выбросов с назначенной случайной или определённой амплитудой и интервалом (рис. 24.2);



Оценка сейсмической нагрузки в виде случайных выбросов

Рис 24.2.

3 – в виде детерминированных выбросов расчетных параметров, представленных в интервальной оценке (рис. 24.3).



Оценка снеговой нагрузки в виде периодических выбросов с случайными параметрами

Рис 24.3.

Для интервальных оценок должны выполняться общие требования определения предельных значений:

- 1) объект должен быть чётко определён по назначению и количественным параметрам;
- 2) процедуры измерений или испытаний, выполняемые для определения значения параметра, должны позволять получать оценку неопределённости измерений;
- 3) процедуры измерений или испытаний должны быть стандартизированными;
- 4) устанавливаемые предельные значения параметров не должны включать в себя неопределённость измерений;
- 5) область допустимых значений количественных параметров может быть ограничена с одной или с двух сторон.

Интервальная оценка всех расчетных параметров выражается через множество случайных чисел, посеянных в интервале по той или иной функции распределения вероятностей.

Функции распределения для многих расчетных параметров (характеристики материалов, нагрузки и др.) известны и вопрос их имитации с учетом времени эксплуатации сооружения в определённой степени представляется решенным. Проблемным является назначение шага имитации для случайных динамично изменяющихся параметров. Если принять шаг равный 1 минуте, то общее число генерированных значений каждого расчетного параметра будет за 30 лет эксплуатации равно $15.8 \cdot 10^6$. Для параметров, изменяющихся в одной временной координате, общее число генерированных значений параметров, по идее, должно быть одинаковым.

В настоящее время статистический имитационный метод сформулирован в виде гипотезы, поэтому строгого доказательства применимости метода не существует. В работе [6] на примере решения задачи расчета вероятности отказа конструктивного элемента по аналитической формуле (24.1) и методом статистического моделирования получен при достаточно большом числе ($1 \cdot 10^6$) сгенерированных случайных величин R и σ почти одинаковое число отказов (131 и 132).

$$Q = 1 - H = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(R) \left(\int_{-\infty}^R \varphi_y(\sigma) d\sigma \right) dR. \quad (24.1)$$

Функция распределения прочности и напряжения	Расчет вероятности отказа Q по формуле	Расчет вероятности отказа Q методом статистического моделирования
Нормальное асимптотическое распределение удельной прочности R и напряжения σ $\mu_R=298,0$ (МПа) $\Delta_R=19,2$ (МПа) $\mu_\sigma=220,0$ (МПа) $\Delta_\sigma=9,4$ (МПа)	131 на 10^6 элементов	132 на 10^6 элементов

В качестве отказа при заданном распределении R и σ рассматривались случаи $R_k - \sigma_k < 0$ превышения напряжения над прочностью, а вероятность отказов по (24.1) есть не что иное как их статистическая частота n/N при $N = \infty$.

При проектировочных расчетах методом статистического моделирования необходимо на всех этапах расчета учитывать случайный характер не только исходных параметров, но и возможности изменения их соотношений на всех этапах, начиная с эскизного проекта, выбора расчетной модели, метода её расчета, технологии изготовления, условий эксплуатации, вплоть до выхода из строя (отказа или разрушения).

Для решения конкретных задач методом статистического моделирования разрабатываются алгоритмы применения метода Монте-Карло прогнозного моделирования на всех этапах.

Ниже приводятся в логической последовательности этапы создания обобщенного алгоритма и отдельно моделирования основных этапов.

На каждом этапе проводится статистический анализ, проверки сходимости, учитывающие правильность выбора параметров моделирования и учета изменения условий работы конструкций.

Создание обобщенного алгоритма прогнозного моделирования работы строительных конструкций. Определение продолжительности моделирования, координатных осей моделирования				
Моделирование нагрузок	Моделирование расчетных схем. Моделирование перехода от нагрузок к усилиям	Моделирование перехода от усилий к напряжениям	Моделирование удельной прочности материалов	Многочисленные прогоны, проверка сходимости, статистический анализ результатов

Моделирование нагрузок				
Назначение координатных осей (координата времени, координата серийных конструкций)	Определение параметров нагрузок и интервальных оценок параметров	Назначение циклов действия нагрузки, синхронизация циклов действия нагрузок	Анализ условий и моделирование корреляций, анализ и моделирование регрессионных изменений	Моделирование мгновенных значений нагрузок. Многократные прогоны, проверка сходимости результатов.

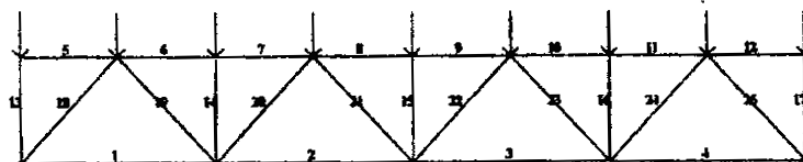
Моделирование расчетных схем. Моделирование перехода от нагрузок к усилиям, деформациям, перемещениям				
Вариантное, дискретное моделирование расчетных схем.	Моделирование перехода от нагрузок к усилиям, деформациям, перемещениям для вариантов расчетных схем	Учет геометрической нелинейности	Построение общей функции распределения для вариантных дискретных расчетных схем	Моделирование перехода от нагрузок к усилиям для расчетных элементов и сечений

Расчетные схемы конструкций могут быть представлены на начальных этапах расчета в нескольких вариантах, для каждого из которых интервальные оценки результатов отличаются и должны проводиться с учетом особенностей работы изучаемых элементов.

Пример. Определение коэффициентов перехода от нагрузок к усилиям для стропильной фермы пролетом 24 метра с заданными параметрами нагрузки по верхнему поясу 12тонн/узел и размерами сечений равнополочных уголков по ГОСТ 8509-93 [6] (рис.24.4).

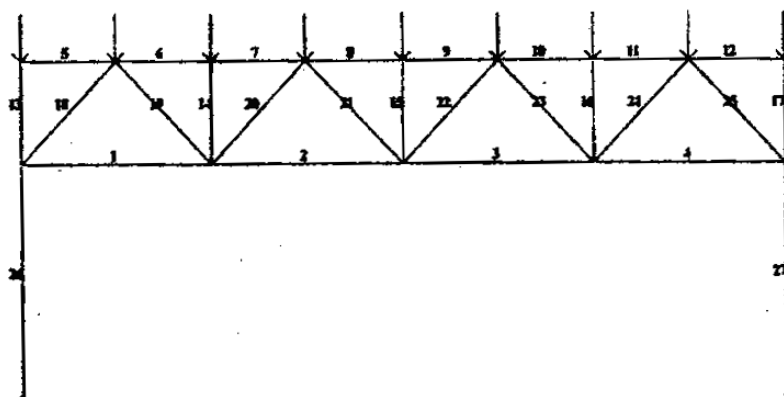
1 вариант расчетной схемы

Задание 1



2 вариант расчетной схемы

Задание 1



3 вариант расчетной схемы

Задание 1

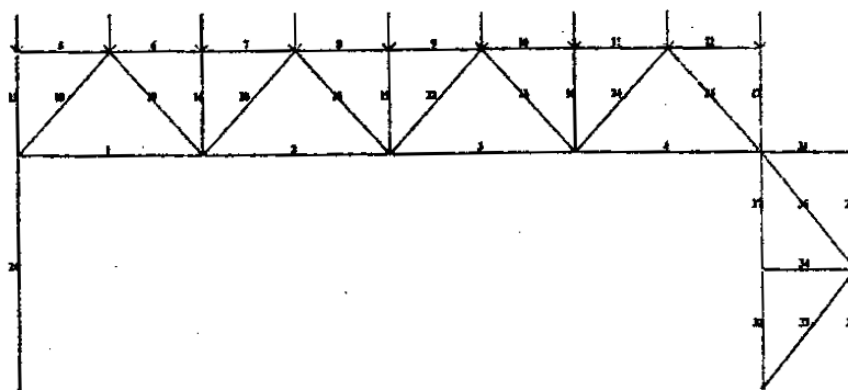


Рис 24.4.

В таблице ниже приведены результаты.

Номер стержня	Усилия при 1 варианте расчетной схемы (т)	Усилия при 2 варианте расчетной схемы	Усилия при 3 варианте расчетной схемы	Коэффициенты перехода от нагрузок к усилиям
1	2	3	4	5
1	40.92	32.15	29.39	2.45 - 3.41 (39.2%)
2	87.63	78.88	76.15	6.34 - 7.30 (15.1%)
8	-93.42	-88.45	-87.13	-7.26 :- -7.78 (7.2%)
14	-11.85	-11.87	-11.87	-0.987-0,989
18	-58.60	-58.54	-58.58	-4.878-4,883
19	41.72	41.75	41.76	3,476-3.480

Суммарное итоговое напряжение получается в результате моделирования перехода от усилий к напряжениям суммированием после всех промежуточных этапов в виде числовых множеств.

Моделирование перехода от усилий к напряжениям				
Построение общей функции перехода от усилий к напряжениям	Учет концентрации напряжений	Учет допусков на геометрические размеры сечений, эксцентриситетов и кривизны	Учет неопределенностей при определении расчетных длин и функций изгиба продольной оси	Моделирование числового множества перехода от усилий к напряжениям

Аналогичные числовые множества с учетом всех факторов получаются в результате моделирования удельной прочности. Размеры множеств итоговых напряжений и удельной прочности должны совпадать.

Моделирование удельной прочности конструкционных материалов				
Учет физической нелинейности	Учет масштабного фактора	Учет скорости деформаций	Учет температуры деформаций	Учет старения

Решение о работоспособности принимается на основе сравнения этих множеств. Фрагмент сравнения на отдельном участке временного цикла показан на рис 24.5.



Рис 24.5

Продолжительность моделирования принимается равной расчетной продолжительности эксплуатации (25, 50, 100 лет) в зависимости от класса ответственности сооружения или назначается с учетом частоты реализаций отдельных нагрузок.

Лекция 25. Современные методы моделирования случайных процессов и величин при решении задач строительной механики расчета и проектирования сооружений

Пример оценки эффективности детерминированного метода отстройки динамической реакции высотного здания от действия случайной ветровой нагрузки [11]

Высотным принято называть здание высотой более 75 м или более 25 этажей. Для характеристики зданий также имеет большое значение соотношение размеров здания, которое в известной степени изменяет параметры обтекания здания воздушным потоком. Здание является плохо обтекаемым объектом, поведение которого в воздушном потоке характеризуется возникновением сложной конфигурации зон напора и разрежения, что вызывает колебания конструкций в различных направлениях. Для компенсации различных аэродинамических эффектов используются различные приемы, например сплошное остекление (рис. 25.1), устройства, разбивающие восходящие воздушный поток (рис. 25.2).

Высотные здания, особенно здания значительной высоты, имеют свою специфику, существенно отличающую их от обычных зданий. С ростом высоты здания резко увеличиваются нагрузки на несущие конструкции, в связи с этим и с развитием высотного строительства применяется несколько конструктивных систем таких зданий: (каркасная, рамно-

каркасная, поперечно-стенная, ствольная, коробчатая, ствольно-коробчатая). В районах со слабой сейсмичностью, к которым относится в том числе и Республика Татарстан и Казань, ветровые воздействия на высотные здания являются основными, а в целом аэродинамическое воздействие наружного климата на высотное здание является экстремальным. Поэтому исследования аэродинамики занимают значительную часть в общем объеме проектных работ. Как правило, эти исследования должны включать в себя физическое моделирование в аэродинамической трубе и математическое моделирование с применением вычислительной техники и программных комплексов.



Рис. 25.1 Монтаж остекления ЖК «Лазурные небеса» (г. Казань)

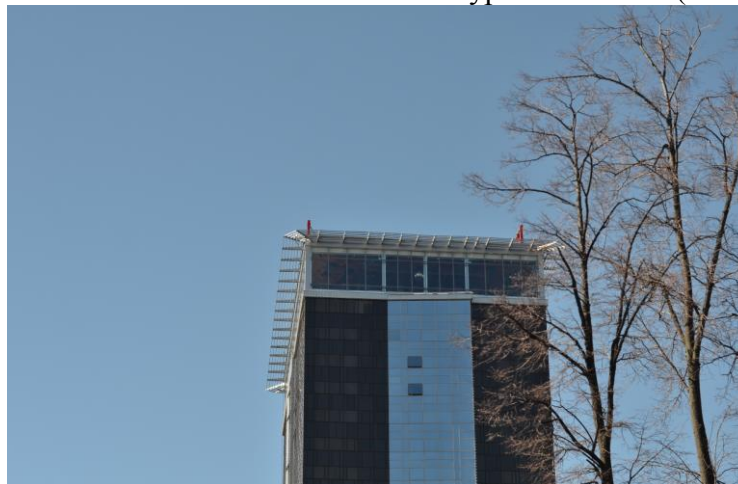


Рис. 25.2 Здание Гостиницы Корстон (г. Казань)

Если для малоэтажных зданий ветровое давление принято считать равномерно действующим на все здание по высоте. То для высотного здания при расчете ветровых нагрузок и тепловых потерь необходимо учитывать рост скорости ветра по высоте. Повышенная высота здания определяет процесс обтекания его ветром. Аэродинамический режим обтекания высотного здания характеризуется повышенными значениями давления ветра. Положениями СНиП по нагрузкам и воздействиям

ветровое воздействие определяется как сумма среднего значения ветрового давления (статического) и пульсационной составляющей. В СНиП приведены аэродинамические коэффициенты для основных форм и положений здания и элементов конструкций в пространстве. Однако лишь в последней редакции документа под названием СТО, выпущенной ЦНИИПСК им. Мельникова, имеются указания для определения нагрузок от резонансного колебательного воздействия ветра на конструкции зданий.

Для устранения опасных сочетаний частот свободных колебаний конструкций и внешнего воздействия используются различные методы, как то: устройство гибких этажей (первого), установка гидравлических и гравитационных маятников, установка дополнительных колебательных систем для дополнительного воздействия. В текущей работе предложен способ изменения параметров конструкций для изменения спектра частот свободных колебаний каркасов высотных зданий при помощи введения в конструкцию в точках обусловленных особенностями особых элементов, жесткость которых уменьшена по сравнению с прочими элементами. Предложено размещать элементы с уменьшенной жесткостью в одном перекрытии и назвать его Конструктивно-Техническим Перекрытием (КТП). Наиболее удобным для сборных железобетонных каркасов расположением податливых элементов является узел стыка ригеля и колонны, в котором так или иначе образуется полость, требующая заполнения особым образом, что делает возможным создание в этой зоне податливого элемента. Таким же образом в монолитных железобетонных каркасах неизбежно образуются рабочие швы – зоны укладки бетонной смеси на поверхность уже затвердевшего бетона, которые могут быть использованы для создания податливых элементов сгруппированных в полосы.

Для оценки воздействия ветрового потока, имеющего различные направления, на колебания высотного здания проведен расчет частот срывов вихрей, характерных для плохо обтекаемых тел при различных скоростях ветра.

Проведены исследования эффективности регулирования частот свободных колебаний каркасов высотных зданий при помощи КТП. Исследования состояли из расчета конечно-элементной модели каркаса здания содержащего в себе один или несколько этажей с КТП.

На примере железобетонного каркаса размером 18х18х108м (рис. 25.3), с расстояниями между колонн 9х4,5м при помощи Эра ПК-2000 исследовано влияние групп КТП различного размера на спектр частот свободных колебаний каркаса. При этом группа КТП формировалась последовательным увеличением количества КТП начиная с первого этажа

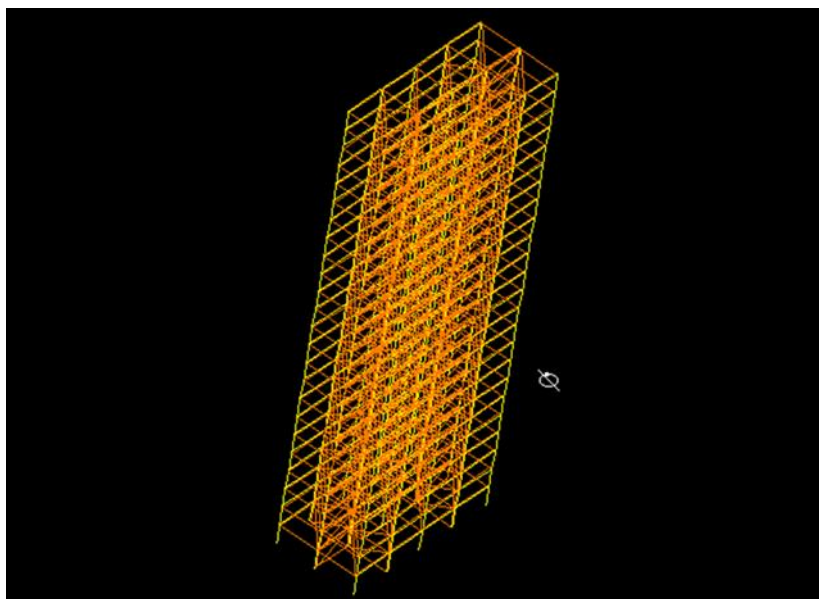


Рис. 25.3 Расчетная модель Эра ПК-2000.

Результаты серии расчетов приведены на рис. 25.4.

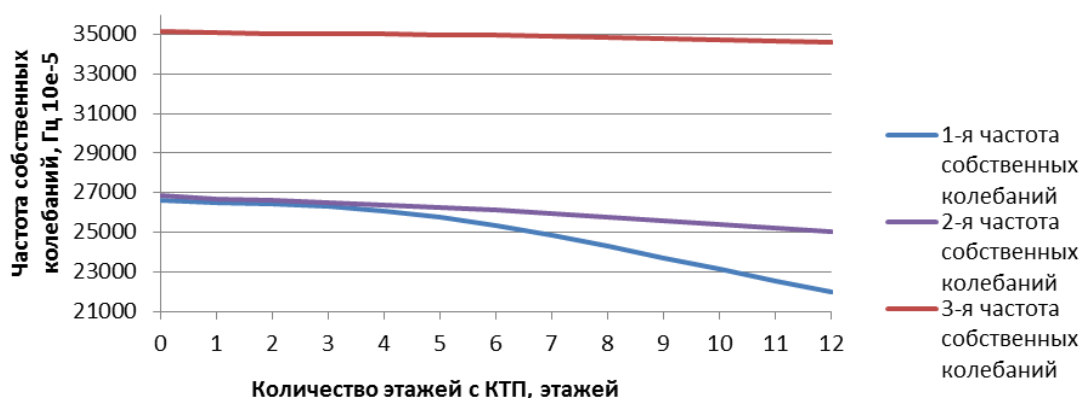


Рис. 25.4. График изменения частот свободных колебаний

На основе полученных результатов может быть определена интересующая степень изменения частот свободных колебаний каркаса здания.

Проведены расчеты с целью определения влияния на спектр частот свободных колебаний каркаса высотного здания уровня расположения группы КТП. Количество КТП определено на основании графика на рис. 25.4. Для этого расчета использована модель высотного здания размером 27x27x210м, 54 этажа. На рис. 25.5 изображен график влияния высоты в этажах расположения нижней границы группы КТП на изменение частоты свободных колебаний каркаса здания относительно каркаса без КТП.

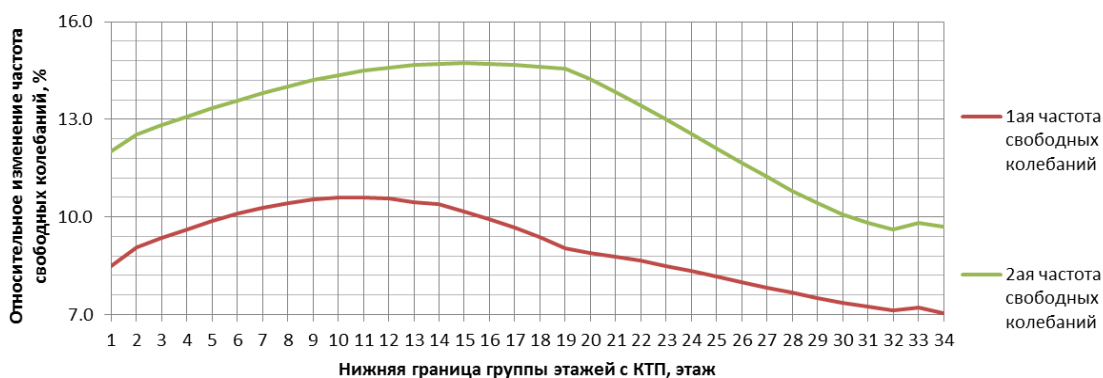


Рис. 25.5. График влияния высоты расположения группы КТП на частоты свободных колебаний

К вопросу оценки эффективности применения КТП для отстройки спектра частот колебаний высотных зданий при действии случайных ветровых нагрузок и возможности выхода за пределы резонансных зон, определяемых с учетом характеристик демпфирования, проводился вероятностный анализ. Исследовались две случайные величины: частоты вихрей от ветровых нагрузок, которые определяются случайным характером ветровых нагрузок, и частоты собственных колебаний здания. Были определены диапазоны скоростей ветра для конкретных условий (ветер в Казани) и диапазоны частот трех первых форм собственных колебаний с учетом и без учета КТП для модели, представленных на рис. 25.5. С использованием статистического моделирования нормального равномерного распределения случайных величин были определены характеристики этих величин: дисперсия $\sigma^2 = 0,096 \text{ Гц}^2$, математическое ожидание $\bar{f} = 0,256 \text{ Гц}$, доверительный интервал $P = [0,239; 0,273] \text{ Гц}$, стандарт $\sqrt{\sigma} = 0,0092 \text{ Гц}$.

От обтекания высотного здания потоком ветра образуется вихревая дорожка Кармана, которая создает периодическое нагружение сооружения при срыве вихрей. Для нахождения частоты этих нагрузок, необходимо определить число Рейнольдса, а потом, зависящее от него число Струхала.

$$Re = \frac{\rho \omega d}{\mu}, \text{ где} \quad (25.1)$$

$\rho = 1,293 \text{ кг/м}^3$ – плотность среды (воздух),

$\omega = 7,25\text{--}58 \text{ м/с}$ – характерная скорость,

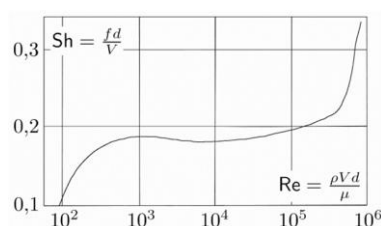
$d = 27\text{--}38,34 \text{ м}$ – ширина здания,

$\mu = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ Па}$ – динамическая вязкость среды (воздух)

В данном случае рассмотрены наиболее неблагоприятные направления ветра: лобовое с площадью соприкосновения погонного ветрового потока и здания 27 м^2 и $38,34 \text{ м}^2$. Число Рейнольдса, Струхали и частоту срыва вихрей определяют при скорости $7,27\text{--}58 \text{ м/с}$.

$$\text{Re} = 1,389 \cdot 10^{-4} \text{--} 1,107 \cdot 10^{-5} \quad \text{для } 27 \text{ м, и}$$

$$\text{Re} = 1,967 \cdot 10^{-4} \text{--} 1,573 \cdot 10^{-5} \quad \text{для } 38,34 \text{ м.}$$



Исходя из графика зависимости Числа Струхали от числа Рейнольдса

$\text{Sh} = 0,2$. Частоты вихрей определяются по формуле (25.2):

$$f = \text{Sh} \cdot v / d, \quad (25.2)$$

Sh – число Струхали

v – скорость ветра, м/с

d – ширина фронта соприкосновения ветрового потока и сооружения, м .

$$f = (0,053\text{--}0,429) \text{ Гц} \quad d = 27 \text{ м}$$

$$f = (1,0378\text{--}0,302) \text{ Гц} \quad d = 38,34 \text{ м}$$

Зная характеристики случайных величин при обеспеченности $0,99$ и $0,95$, определяем диапазон частот случайных периодических ветровых нагрузок, их вариативность и коэффициент перегрузки.

При обеспеченности $0,99$

При 27 м :

$$\bar{f} = 0,258 \text{ Гц}, \quad \sigma = 0,0093 \text{ Гц}^2, \quad P = [0,241; 0,275] \text{ Гц}, \quad \sqrt{\sigma} = 0,096 \text{ Гц.}$$

При 38,34 м:

$$\bar{f}=0,155 \text{ Гц}, \sigma =0,0048 \text{ Гц}^2, \quad P=[0,143; 0,167] \text{ Гц}, \sqrt{\sigma}=0,078 \text{ Гц}.$$

При обеспеченности 0.95

При 27 м:

$$\bar{f}=0,2426 \text{ Гц}, \quad \sigma =0,0122 \text{ Гц}^2, \quad P=[0,223; 0,262] \text{ Гц}, \sqrt{\sigma}=0,125 \text{ Гц}.$$

При 38,34 м:

$$\bar{f}=0,160 \text{ Гц}, \quad \sigma =0,006 \text{ Гц}^2, \quad P=[0,146; 0,174] \text{ Гц}, \sqrt{\sigma}=0,06 \text{ Гц}.$$

Диапазоны частот трех первых форм собственных колебаний с учетом и без учета КТП для модели, представленные на рис. 25.6 . при различном расположении КТП позволяют определить характеристики управляемости частотами по каждой форме, если определить их изменчивость и коэффициент однородности как случайных величин, распределенных равномерно в полученных диапазонах. Графики для определения диапазонов изменчивости частот 1,2,3 форм колебаний здания при ветровой нагрузке на 27 м (рис. 25.6) и 38,34 (рис. 25.7) при обеспеченности 0.99 показаны ниже.

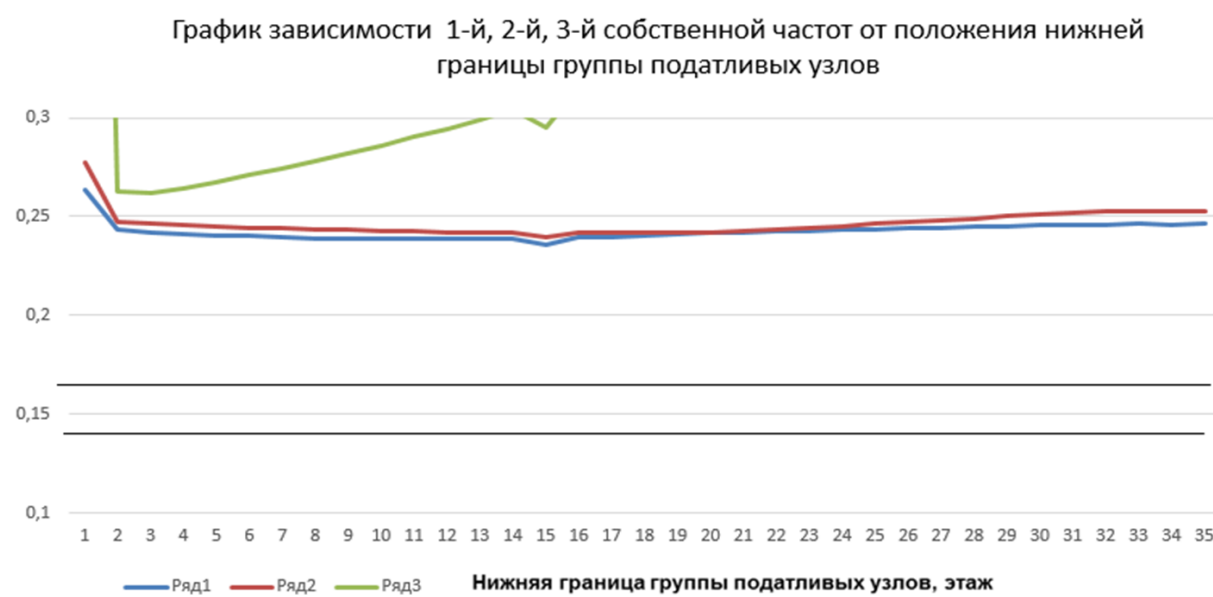
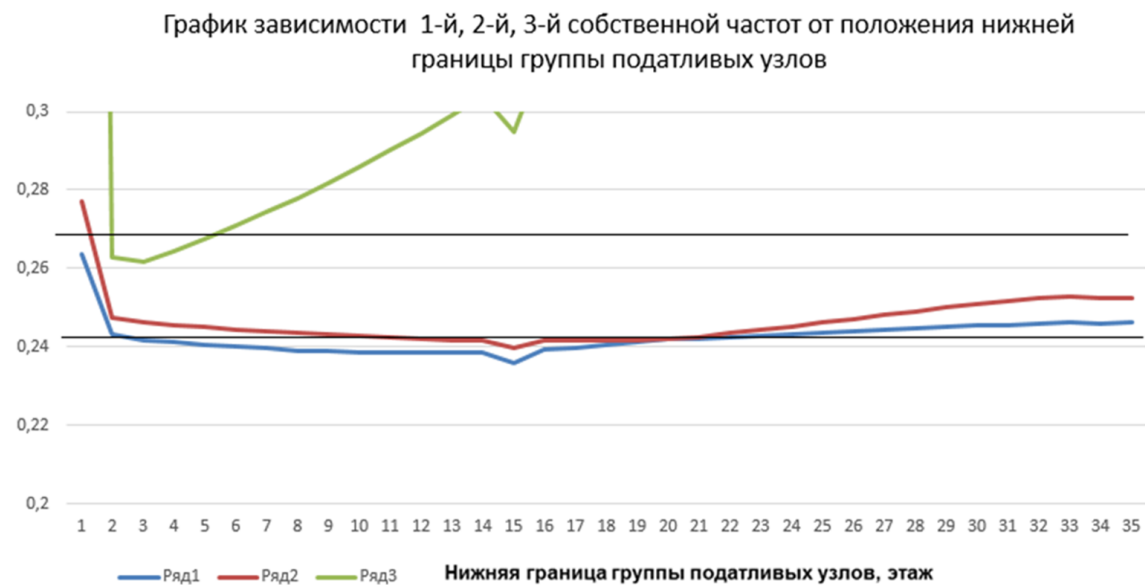


Рис. 25.6



На Рис. 25.6 видно, что случайные величины частот первых трех форм колебаний и интервал Р для характеристики случайной величины частоты вихрей не пересекаются. Это означает, что в данном случае отстройка спектра частот не требуется.

На Рис. 25.7 интервалы этих случайных величин пересекаются, что ставит вопрос о возможности отстройки частот с помощью варьирования расположения КТП, чтобы уйти от этого пересечения.

Используя характеристики изменчивости случайных величин частот воздействия (F) и управлениями частотами собственных колебаний здания (R) можно определить случайный коэффициент запаса управляемости ($K = R/F$). Для начала вычисляется коэффициент перегрузки для ветра (F) и коэффициент однородности для 3-х форм колебания здания (R) с доверительной вероятностью обнаружения их математического ожидания 0.99.

$$K_{\Pi} = 1 + \beta V_f$$

$\beta = 2,33$ -- функция Гаусса для 0.99

$$V_f \text{ --вариативность } V_f = \frac{\sqrt{\sigma}}{\bar{f}}$$

Для ветровой нагрузки

- $K_{\Pi} = 1,448$ для 27м
 - $K_{\Pi} = 1,398$ для 38,34 м
- K_{0i} -коэффициент однородности
- $$K_{0i} = 1 - \beta V_{fi}$$

Для 3-х форм колебания здания

- $K_{01} = 0,96$
- $K_{02} = 0,938$
- $K_{03} = 0,25$

Коэффициент однородности наибольший получился по 1-й форме колебаний (основной форме колебаний) так как по этой форме вышла наименьшая вариативность.

$$K_i \text{ --коэффициент управляемости } K_i = 1 + \sqrt{1 - K_{0i} K_{\Pi i} (2 - K_{0i})(2 - K_{\Pi i})} / K_{0i} (2 - K_{0i})$$

- $K_1 = 2,04$
- $K_2 = 2,05$
- $K_3 = 3,32$

По этой форме выходит наибольший отклик, динамическая реакция и мы можем сами конструктивно определить ширину резонансной зоны с учётом демпфирования. Таким образом, использование КТП для отстройки частот позволяет с коэффициентом запаса управления 2.04 по отношению к частоте вихрей регулировать частоту первой формы, наиболее опасной при резонансе. С 99% точностью мы можем отстроить частоты первых трех форм колебаний при заданном диапазоне ветровых нагрузок.

Лекция 26. Современные методы моделирования случайных процессов и величин при решении задач строительной механики расчета и проектирования сооружений

Пример применения метода статистического моделирования в решении других задач динамики и статики сооружений [6].

В 1971 году Министерством образования СССР было разработано техническое задание на разработку способов гашения колебаний высотных зданий лабораторных корпусов. Предполагалось, что колебания зданий будут мешать работе высокоточного научного оборудования, которое планировалось размещать в этих корпусах.

Исследования, выполненные в Казанском инженерно-строительном институте, свидетельствовали о возможности применения для гашения колебаний высотных зданий многочисленной группы динамических

гасителей без специальных демпфирующих устройств. Позднее теоретические и экспериментальные работы, выполненные на моделях, легли в основу разработки группы гасителей колебаний для гашения колебаний высотного здания физического факультета КГУ. В основу конструктивного решения гасителей, составляющих группу, были приняты разработки, защищенные авторским свидетельством № 56106.

Основной целью этих разработок являлось снижение колебаний зданий при действии ветра. Поскольку эксперимент такого рода проводился впервые, выяснялась также эффективность группы гасителей при случайном воздействии и отрабатывались практические методы и приемы получения исходных параметров здания и настройки гасителей.

Здание физического факультета КГУ представляет собой трехэтажное развернутое в плане здание с 15 - этажной башней. Каркас здания – стальнобетонированный, стеновое заполнение из керамзитобетонных навесных панелей, перекрытия – сборные железобетонные. Горизонтальная жесткость здания обеспечивается совместной работой каркаса и железобетонных пространственных диафрагм. С целью получения исходных данных проводились продолжительные наблюдения за колебаниями 15-этажной части здания.

В таблице 26.1 даны значения амплитуд перемещения, скоростей и ускорения колебаний высотной части корпуса на отметке пола 15 технического этажа отм.55.80 при различных скоростях ветра

Таблица 26.1

Скорость ветра, м/сек	Амплитуды перемещений (мм)		Амплитуды скорости, мм/сек		Амплитуды ускорения	
	Макс.	сред.квadrat	Макс.	сред.квadrat	Макс.	сред.квadrat
0–5	0,02–0,1	0,01–0,05	0,09–0,45	0,05–0,24	0,4–2	0,1+1
5–15	01,–0,3	0,05–0,1	0,45–1,35	0,240–0,45	2–6	1–2
15–25	0,3–0,6	0,1–0,3	1,35–2,7	0,45–1,55	6–12	2+6

Для сравнения следует отметить, что официально установленное значение уровня колебаний по ускорению, соответствующее порогу ощущения, равно 10 мм/сек^2 , допускаемая амплитуда колебаний для высокочувствительного к вибрациям оборудования, соответственно по скорости и ускорению, равна 0,1 и 7 мм/сек^2 .

Проектирование и настройка виброгасителей требует достоверных данных о действительных значениях таких параметров здания как собственные частоты и декремент затухания колебаний. Наиболее точно эти параметры определяются только экспериментально на стадии полной готовности здания.

Для измерений собственных частот возбуждались поступательные колебания раскачиванием здания по соответствующей оси, проходящей через

центр жесткости. Во всех случаях при снятом грузе производилась регистрация ветрового фона для получения дополнительных данных о собственных частотах здания и о наличии высших форм колебаний. Как показала обработка, на всех осциллограммах ветрового фона практически отсутствуют высшие формы колебаний здания. Собственная частота здания по ветровому фону определялась на осциллограмме в интервалы времени, соответствующие наиболее устойчивым колебаниям здания.

Для повышения точности и надежности результатов измерений производилось многократное повторение эксперимента с последующим определением средних значений собственных частот и декрементов. Данные измерения по основным формулам приведены в таблице 26.2

Таблица 26.2

Результаты измерения собственных частот и декремента колебаний лабораторного корпуса КГУ

Форма колебаний	Экспериментальные значения		
	по затухающим колебаниям		по случайным колебаниям
	f_0	δ	f_0
Крутильные	0,745	0,11	0,735
Продольные	0,692	0,08	0,685
Поперечные	0,782	0,08	0,787

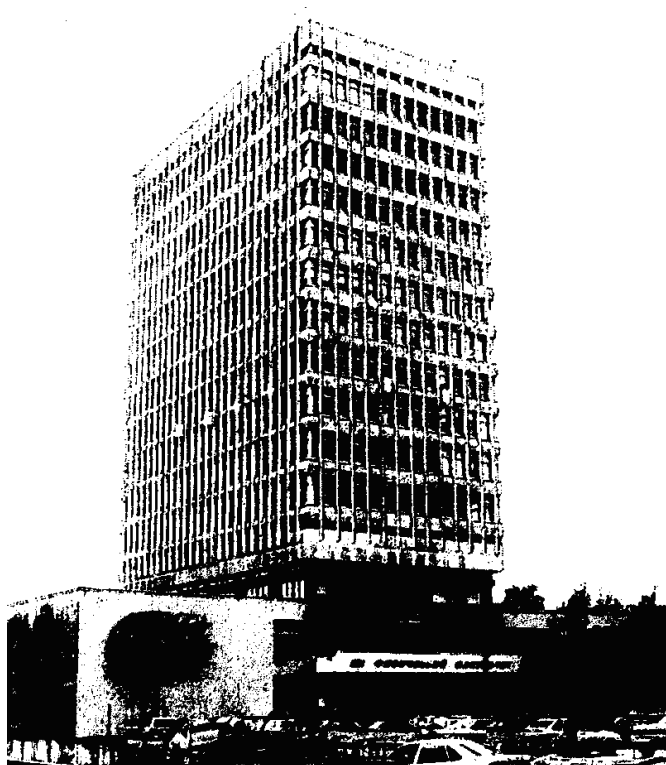


Рис. 26.1. Здание физического факультета КГУ



Рис. 26.2 Группа гасителей колебаний на перекрытии технического этажа здания

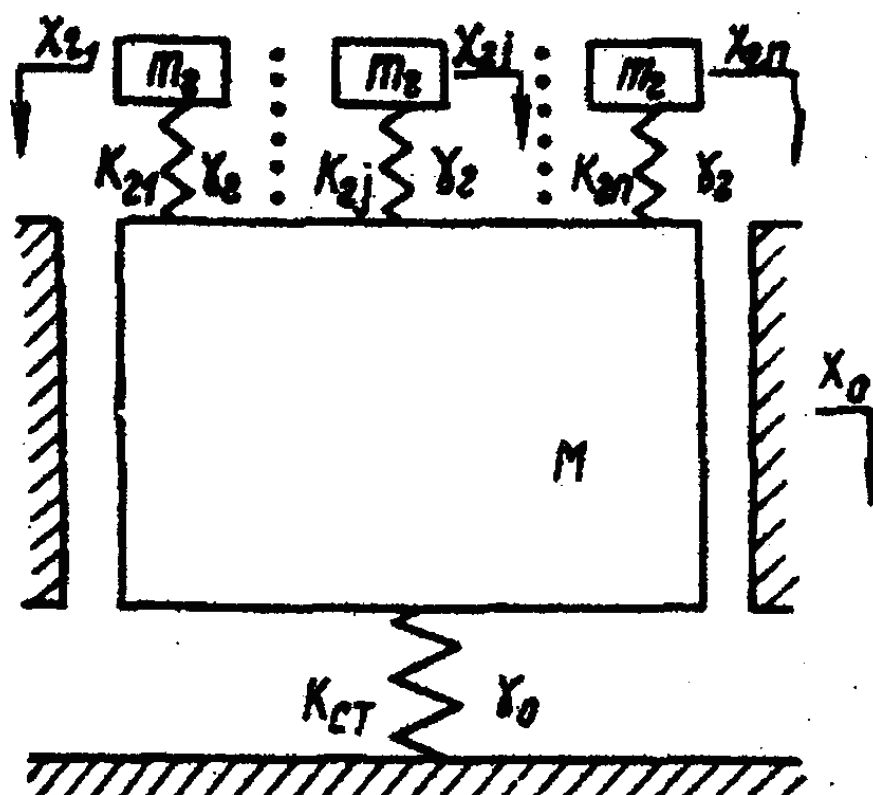


Рис. 26.3. Расчетная схема основной системы с группой виброгасителей

Экспериментальным исследованиям предшествовали теоретические разработки работы группы гасителей колебаний при нестабильной частоте гармонического воздействия.

Была рассмотрена линейная система с одной степенью свободы, оборудованная группой виброгасителей (рис. 26.3). В дальнейшем целесообразно считать массы m и коэффициенты неупругого сопротивления γ гасителей одинаковыми. Предельно допустимая амплитуда колебаний системы с гасителями предполагается достаточно малой, что обеспечивает возможность применения гасителей с малым затуханием.

Статическую жесткость гасителя j обозначим $k_{гj}$. На рисунке 26.3. $k_{гj}$, M и γ — соответственно статическая жесткость, масса и коэффициент неупругого сопротивления основной системы.

Система уравнений, описывающая реакцию системы с группой гасителей на элементарное стационарное воздействие $F(t) = e^{j\omega t}$, после сокращения на $e^{j\omega t}$ запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\omega^2 m_{гj} x_{гj} + K(x_{гj} - x_0) &= 0; \\ -\omega^2 M x_0 &= k_{cm}(1 + i\gamma_0)x_0 + \sum_{j=1}^n K(x_0 - x_{гj}) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ K &= k_{гj}(1 + i\gamma_{гj}), \end{aligned} \quad (26.1)$$

где ω_0 — круговая частота гармонического воздействия; x_0 — амплитуда колебаний основной системы; $x_{гj}$ — амплитуда колебаний гасителя j .

Критерием качества виброгашения при гармоническом воздействии с нестабильной частотой является минимальное значение модуля динамической жесткости z . Последнее соответствует максимуму амплитуды колебаний системы с гасителями.

Из системы уравнений (26.1) следует, что $z \propto 1/x_0$. После соответствующей подстановки получаем

$$z = k_{cm}(1 + i\gamma_0) - M\omega^2 - \sum_{j=1}^n \left[K\omega^2 m_{гj} / (K - m_{гj}\omega^2) \right]. \quad (26.2)$$

Считая распределение виброгасителей по статической жесткости $k_{гj}$ (или то же самое по собственной частоте гасителей $\omega_{гj}$) непрерывным (что допустимо при достаточно большом числе гасителей в группе) и, используя обозначения

$$\Delta_{\omega} = (\omega - \omega_0) / \omega_0 \quad \text{и} \quad \Delta_{г} = (\omega_0 - \omega_{гj}) / \omega_0, \quad \text{получаем}$$

$$z = M\omega_0^2 \left\{ -2\Delta_{\omega} - \Delta_{\omega}^2 + v(1 + \Delta_{\omega})^2 A \right\} + i \left\{ \gamma_0 + v(1 + \Delta_{\omega})^2 B \right\}, \quad (26.3)$$

где

ω_0 - собственная частота основной системы;

$$\nu = \frac{nm_{\Gamma}}{M};$$

$$A = \int_{-\infty}^1 \frac{2(\Delta_r + \Delta_{\omega})}{4(\Delta_r + \Delta_{\omega})^2 + \gamma_{\Gamma}^2} \varphi(\Delta_r) d\Delta_r, \quad (26.4)$$

$\varphi(\Delta_r)$ – функция плотности распределения расстроек гасителей. Формулу для определения В получим заменив в подынтегральном выражении $2(\Delta_r + \Delta_{\omega})$ на γ_r . В формулах для А и В в числителе и знаменателе подынтегральных выражений опущены величины высокого порядка малости соответствий $(\Delta_r + \Delta_{\omega})^2$ и $(\Delta_r + \Delta_{\omega})^4$. Эти упрощения допустимы, так как группа гасителей работает лишь в узкой полосе частот при малой относительной массе гасителей.

$\varphi(\Delta_r)$ при заданных параметрах $\gamma_r, \gamma_0, \omega_0, \nu$ и М динамическая жесткость становится функцией одной переменной Δ_{ω} .

Рассмотрим функции $\varphi(\Delta_r)$ плотности распределения расстроек, соответствующие нормальному закону и закону, при котором собственные частоты гасителей равномерно распределены в некотором диапазоне частот.

При нормальном законе распределения

$$\varphi(\Delta_r) = (\Delta_{\sigma r} \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left[-(\Delta_r + c)^2 / 2\Delta_{\sigma r}^2\right], c = 1 - \Omega; \quad \Omega = \omega_{rM} / \omega_0. \quad (26.5)$$

Оптимизируемыми параметрами в данном случае являются среднеквадратичная расстройка группы $\Delta_{r\sigma}$ и отношение математического ожидания ω_{rM} собственных частот гасителей к собственной частоте ω_0 основной системы.

Оптимальная среднеквадратичная расстройка при нормальном законе распределения может быть задана допусками на изготовление элементов гасителей или классом точности прибора, с помощью которого настраиваются гасители.

При равномерном разнесении частот настройки гасителей по некоторому диапазону частот функция распределения имеет вид $\varphi(\Delta_r) =$

$1 / 2h$, где $h = \text{const}$. Из условия нормирования $\int_{-\infty}^1 \varphi(\Delta_r) d\Delta_r = 1$ определяется

полоса расстройки группы виброгасителей, равная $2h$. Оптимизируемыми параметрами в этом случае по аналогии являются h и Ω .

Согласно принятому выше, оптимальные параметры определяются из условия получения минимума модуля динамической жесткости системы с группой гасителей.

Задача решена численным методом для дискретных значений оптимизируемых параметров. Выходной величиной являлся коэффициент

гашения χ , равный отношению минимума модуля динамической жесткости системы с гасителями к минимальному модулю данного параметра системы без гасителей.

В таблице 26.3 приведены результаты анализа динамической жесткости системы с группой гасителей соответственно при нормальном законе распределения и при равномерном разнесении частот настройки. В обоих случаях коэффициент неупругого сопротивления гасителей γ_r принят равным 0,01, что характерно для гасителей со стальными упругими элементами без специальных демпфирующих устройств. Сравнение результатов показывает, что коэффициенты гашения χ при рассмотренных функциях распределения отличаются менее, чем на 5%.

Таблица 26.3

ν	Нормальный закон распределения при $\gamma_0 =$						Равномерное распределение частот при $\gamma_0 =$					
	0,01			0,05			0,01			0,05		
	$\Delta_{\sigma r. \text{ опт}}$	Ω	χ	$\Delta_{\sigma r. \text{ опт}}$	Ω	χ	$\Delta_{\sigma r. \text{ опт}}$	Ω	χ	$\Delta_{\sigma r. \text{ опт}}$	Ω	χ
0,0005	0,012	1	2,74	0,014	0,999	1,3	0,021	0,999	2,78	0,022	0,999	1,33
0,001	0,019	0,999	3,53	0,02	0,999	1,45	0,028	0,999	3,57	0,033	0,999	1,47
0,002	0,027	0,999	4,7	0,029	0,998	1,69	0,042	0,998	4,62	0,047	0,998	1,71
0,005	0,044	0,995	6,98	0,048	0,995	2,12	0,066	0,995	7,2	0,075	0,995	2,08
0,01	0,063	0,992	9,8	0,067	0,992	2,29	0,098	0,992	9,9	0,11	0,993	2,36

Оптимальные параметры группы гасителей при $\nu = 0,0005-0,01$, $\gamma_0 = 0,01-0,05$ и $\gamma_r = 0,01$ рекомендуется определять по следующим формулам, полученным путем обработки численных результатов:

- а) нормальный закон распределения

$$\Delta_{\sigma r. \text{ опт}} = (0,52 + 2,1\gamma_0)\sqrt{\nu} + (1 - 10\gamma_0)\nu; \quad (26.6)$$

- б) равномерное разнесение частот настройки гасителей

$$h_{\text{опт}} = (0,9 + 2,25\gamma_0)\sqrt{\nu}. \quad (26.7)$$

Коэффициент гашения и отношение математического ожидания собственных частот гасителя к собственной частоте основной системы в обоих случаях определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \chi &= (40 - 460\gamma_0)^3 \sqrt{\nu} + (280 - 850\gamma_0)\nu; \\ \Omega &= (4 + \nu)/4(1 + \nu). \end{aligned} \quad (26.8)$$

$$z = k_{cm}(1 + i\gamma_0) - M\omega^2 - \sum_{j=1}^n \left[K\omega^2 m_r / (K - m_r \omega^2) \right]$$

$$K = k_{rj}(1 + i\gamma_r); \quad (26.9)$$

Рассмотрим решение вопросов эффективности динамических гасителей колебаний с использованием статистического моделирования. Для этого воспользуемся формулой динамической жесткости основной системы с группой гасителей и выполним расчеты по схеме, приведенной в таблице

Алгоритм расчета эффективности динамических гасителей колебаний методами статистического моделирования	
1	2
Основные ступени расчета	Статистические и расчетные параметры
I. Назначение расчетного числа динамических гасителей в группе, определение собственной частоты основной системы, приведенной массы основной системы, массы одного гасителя	$n=30 \quad m_r=0,01 \quad M=1$ $\omega_0 = 2\pi * 0,692 = 2,172 \quad k_{cm} = M * \omega_0^2 = 4,717$ $\gamma_0 = 0,01 \quad \gamma_r = 0,01 \quad k_{rj} = m_r * \omega_{rj}^2 = 0,01 * \omega_{rj}^2$
II. Назначение параметров статистического распределения собственных частот гасителей колебаний	$\varphi(\omega_r)$ -плотность распределения собственных частот гасителей; для нормального распределения собственных частот гасителей математическое ожидание $\mu_r = 0,992 * 2,172 = 2,154$ и стандарт собственных частот гасителей колебаний $\Delta_r = 0,063$ для равномерного распределения собственных частот гасителей среднее значение $\mu_r = 0,992 * 2,172 = 2,154$ и полоса расстройки собственных частот гасителей колебаний $2h = 0,098$
III. Получение по известным параметрам статистического распределения собственных частот гасителей с помощью генератора случайных чисел случайных реализаций значений собственных частот гасителей	
IV. Определение динамической жесткости основной системы с гасителями колебаний.	Z
V. Определение коэффициента гашения колебаний и анализ	Ω .

По предложенной методике был реализован расчет статистической группы гасителей колебаний.

Статистическое моделирование работы растянутого стержня из сосны

Определим методом статистического моделирования вероятность разрушения центрально растянутого расчетным усилием $N=25000$ кгс

элемента конструкции размерами сечения 20 × 10 см, материал сосна 1 сорта. Расчетное сопротивление растяжению сосны 1 сорта $R_p=10$ МПа. (табл.3 СНиП П-25-80).

Напряженное состояние и характеристика элементов	Сорт древесины	$R_{вр}$, МПа	ν	R^x , МПа	γ_m	R , МПа
Растяжение.	1	34	0,24	20	1,32	10

$R_{вр}$ - среднее значение временного сопротивления при стандартных испытаниях материала; Определим методом статистического моделирования вероятность разрушения центрально растянутого расчетным усилием $N=25000$ кгс

ν - коэффициент вариации.

Проверим соответствие требованию прочности по СНиП П-25-80

$$\sigma = \frac{N}{F_{ит}} = \frac{25000}{20 \cdot 10} = 125 \text{ кгс / см}^2 \geq R = 100 \text{ кгс / см} \quad (26.10)$$

Действующее напряжение превышает расчетное сопротивление на 25%. Определим какова вероятность разрушения элемента конструкции при принятых силовых, прочностных и геометрических параметрах.

Определим статистические характеристики геометрических параметров, параметров нагруженности и прочности.

Статистические характеристики параметров нагруженности.

Наименование параметра	Среднее арифметическое значение	Среднее квадратическое отклонение
Растягивающее усилие в расчетном элементе конструкции	$N_n = N / \gamma_f = 25000 / 1,2 = 20833$ кгс Среднее арифметическое значение принято равным усилию от нормативных нагрузок	$\Delta_N = N_n (1 - \gamma_a) / 3 = 1388$ кгс Обеспеченность расчетной нагрузки принято равным 3 Δ

Статистические характеристики геометрических параметров

Наименование параметра	Среднее арифметическое значение	Среднее квадратическое отклонение
Размер поперечного сечения а	20 см	$v = 0,02$ $\Delta a = 0,4$ см.
Размер поперечного сечения б	10 см	$v = 0,02$ $\Delta a = 0,2$ см.

Статистические характеристики удельной прочности древесины

Наименование параметра	Среднее арифметическое значение	Среднее квадратическое отклонение
$R_{\text{ср}}$ - среднее значение временного сопротивления при стандартных испытаниях материала v	$R_{\text{ср}} = 340$ кгс / см ² .	$v = 0,24$ $\Delta_{\text{ср}} = 27,2$ кгс / см ² .
Коэффициент, учитывающий влияние на прочность длительного действия нагрузки	$K_{\text{дл}} = 0,76$	$\Delta_{\text{дл}} = 0,02$
Коэффициент однородности, учитывающий влияние на прочность пороков и размеров элемента	$K_{\text{одн}} = 0,73$.	$\Delta_{\text{одн}} = 0,02$

Примем следующие условия моделирования:

Усилия в элементе конструкции изменяются во времени с длительностью одного цикла 10 минут. Расчетная длительность эксплуатации 20 лет. Общее число циклов изменения усилия 1752000.

1. Примем общее количество элементов конструкций равным 10000. Геометрические параметры и удельная прочность сосны изменяются в пространстве множества конструктивных элементов.

Используя генератор случайных чисел и принятые статистические характеристики параметров нагруженности выполним моделирование усилий в элементе конструкции с интервалом 10 минут за расчетную длительность эксплуатации 20 лет. В таблице для примера приведены первые 10 значений усилия.

Наименование параметра	Значения, параметра (первые 10) полученные с помощью генератора случайных чисел для принятых статистических характеристик
Усилие (кгс)	2.143e4, 2.465e4, 2.064e4, 2.245e4, 2.11e4, 1.947e4 2.426e4, 2.067e4, 2.255e4, 2.37e4, 2.088e4

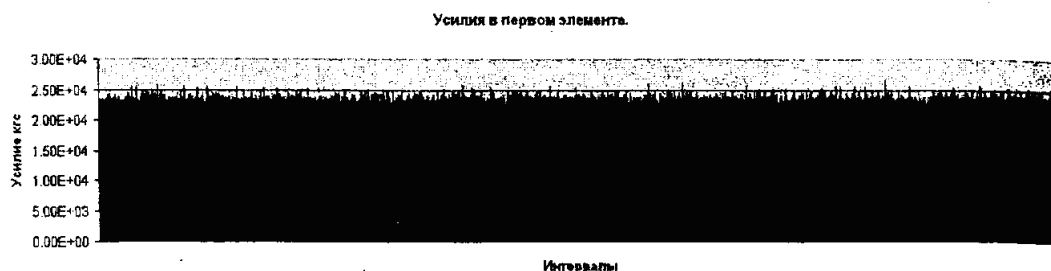


Рис. 26.4. Реализации усилия в элементе конструкции

Выполним моделирование удельной прочности древесины в соответствии с принятыми статистическими характеристиками и общим количеством элементов конструкций 10000.

Наименование параметра	Значения, параметра (первые 10) полученные с помощью генератора случайных чисел для принятых статистических характеристик
Значения удельной прочности для стандартных испытаниях материала;	304.18, 284.56, 301.38, 262.36, 202.448, 343.552, 330.15, 385.404, 518.85, 405.993, 420.387
Коэффициент учитывающий влияние на прочность длительного действия нагрузки;	0.701, 0.703, 0.689, 0.697, 0.694, 0.69, 0.699, 0.719, 0.695, 0.702, 0.724
Коэффициент однородности, учитывающий влияние на прочность пороков и размеров элемента;	0.396, 0.446, 0.56, 0.371, 0.461, 0.503, 0.512, 0.579 0.527, 0.451, 0.462,

Наименование параметра	Значения параметра (первые 10) полученные с помощью генератора случайных чисел для принятых статистических характеристик
Удельная прочность на растяжение $R_p = R_{зр} \cdot K_{дл} \cdot K_{одн}$	200.447, 169.314, 209.054, 124.731, 198.455, 175.835, 202.24, 158.026, 241.774

Определим количество случаев превышения растягивающих напряжений σ значений удельной прочности на растяжение R_p путем сравнения двух множеств после ранжирования. Результаты сравнения показали, что при расчетном числе циклов 1752000, ни одного случая превышения растягивающих напряжений σ значений удельной прочности на растяжение R_p не было.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Учебник. Изд. испр. – СПб: Издательство «Лань», 2004. – 656 с.
2. Ржаницын А.Р. Строительная механика. Учебное пособие для вузов. М.: Высш. Школа, 1982. – 400 с.
3. Гусев А. С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций. Учебное пособие. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009, – 224 с.
4. Райзер В.Д. Расчет и нормирование надежности строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1995. – 352 с.
5. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 240 с.
6. Манапов А.З. Учебное пособие «Расчет надежности и ресурса строительных конструкций методом статистического моделирования». Казань, КГАСУ, 2010 г. –132 с.
7. Болотин В.В. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. (Глава 7 и 8) – М.: Машиностроение, 1968. – 831 с.
8. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. – 279 с.
9. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.
10. Болотин В.В., Диментберг М.Ф. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. (Глава 10) – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.
11. Лукашенко В.И., Барханов А.И., Вафина Д.А. Анализ эффективности применения КТП для отстройки колебаний высотных зданий при действии ветровых нагрузок. – Казань. Издательство КГАСУ Журнал «Известия КГАСУ», № 2(16), 2011.

ПРИЛОЖЕНИЕ

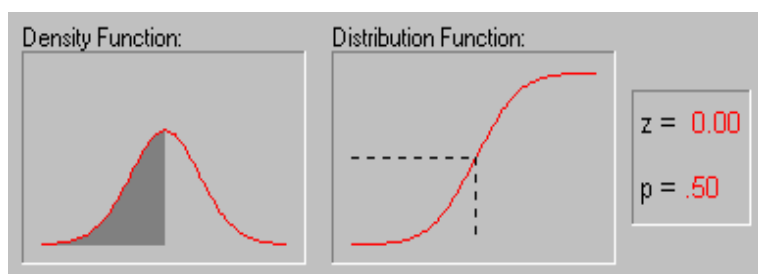
Таблица 1

Интеграл вероятностей (нормированная функция Лапласа)

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^U e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right) *$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02892	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	4999997133									

* $\Phi(U)$ – обозначается функция Лапласа; erf – функция ошибок.



Нормальное распределение, или распределение Гаусса (Gauss) используется для проверки различных гипотез, включая гипотезу о равенстве двух средних. Это распределение имеет

среднюю арифметическую равную 0 и дисперсию равную 1. На графике слева представлена плотность распределения и вероятность (p) соответствующая различным (как говорят «критическим») значениям Z.

Значения в таблице представляют собой площадь, находящуюся под частью кривой, которую описывает стандартизированная нормальная функция (Gausse) в интервале значений от 0 до Z. Например, площадь, ограниченная значениями 0 и 2,36, находится на пересечении линии 2,30 и колонки 0,06. Она равна 0,4909. Если значение Z является отрицательным, то, учитывая симметричность функции относительно средней, искомая вероятность (площадь) будет находиться на пересечении линии и колонки, соответствующих абсолютному значению Z (|Z|). Например, площадь между 0 и -1.3 равна площади между 0 и 1.3; то есть она находится на пересечении линии 1.3 и колонки 0 и равна 0,4032.

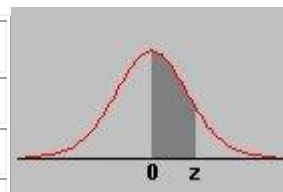
Чтобы лучше разобраться в том, как рассчитывается вероятность гипотез с помощью таблицы значений нормального распределения, попробуйте самостоятельно построить в Экселе соответствующую таблицу (как ту, что вы видите ниже), используя встроенные функции данного табулятора.

Таблица 2

Нормальное распределение

Интеграл от 0 до z

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830



1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Основные формулы комбинаторики

а) перестановки $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$;

б) размещения $A_n^m = n \cdot (n-1) \dots (n-m+1)$;

в) сочетания $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

2. Классическое определение вероятности

$P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число благоприятствующих событию A исходов;
 n – число всех элементарных равновозможных исходов.

3. Вероятность суммы событий

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

4. Вероятность произведения событий

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B | A),$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A | B).$$

$P(A | B)$ – условная вероятность события A при условии, что произошло событие B ;

$P(B | A)$ – условная вероятность события B при условии, что произошло событие A .

5. Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A | H_k),$$
 где H_1, H_2, \dots, H_n – полная группа гипотез, то есть $H_i \cdot H_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$, Ω – достоверное событие.

6. Формула Байеса (формула Бейеса). Вычисление апостериорных вероятностей гипотез:

$$P(H_m | A) = \frac{P(H_m)P(A | H_m)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A | H_k)}, \quad m = 1, \dots, n$$

где H_1, H_2, \dots, H_n – полная группа гипотез.

7. Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$
 – вероятность появления события ровно k раз при n независимых испытаниях, p – вероятность появления события при одном испытании.

8. Наивероятнейшее число наступления события

Наивероятнейшее число k_0 появления события при n независимых испытаниях:

$np - (1-p) \leq k_0 < np + p$, p – вероятность появления события при одном испытании.

9. Локальная формула Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$
 – вероятность появления события ровно k раз при n независимых испытаниях, p – вероятность появления события при одном испытании, $q = 1 - p$.

10. Интегральная формула Лапласа

$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ – вероятность появления события не менее m_1 и не более m_2 раз при n независимых испытаниях, p – вероятность появления события при одном испытании, $q = 1 - p$.

11. Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности p :

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right).$$

II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

12. Ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	x_n
p_i	p_1	p_2	p_n

Сумма вероятностей всегда равна 1. $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

13. Функция распределения (интегральная функция распределения)

Функция распределения случайной величины X определяется по формуле $F(x) = P(X \leq x)$. Это неубывающая функция, принимающая значения от 0 до 1. Если задана плотность распределения $f(x)$, то функция

распределения выражается как
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

14. Плотность распределения (дифференциальная функция распределения)

Плотность распределения случайной величины X определяется по формуле $f(x) = F'(x)$. Существует только для непрерывной случайной величины. Для нее выполняется условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (площадь под кривой равна 1).

15. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

Может быть вычислена двумя способами:

1) через функцию распределения $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$;

2) через плотность распределения $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

16. Математическое ожидание случайной величины

1. Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

2. Для непрерывной случайной величины X , заданной плотностью распределения:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx$$

17. Дисперсия случайной величины

По определению дисперсия – это второй центральный момент:

$$D(X) = M([X - M(X)]^2) = M(X^2) - (M(X))^2$$

1. Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения:

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \right)^2 \end{aligned}$$

2. Для непрерывной случайной величины X , заданной плотностью распределения :

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - M(X))^2 dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx \right)^2. \end{aligned}$$

18. Среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

19. Начальный момент r -го порядка случайной величины

$$\nu_r = M(X^r)$$

В частности, первый начальный момент – это математическое ожидание: $\nu_1 = M(X^1) = M(X)$

20. Центральный момент r – го порядка случайной величины

$$\mu_r = M([X - M(X)]^r)$$

В частности, второй центральный момент – это дисперсия: $\mu_2 = M([X - M(X)]^2) = D(X)$.

21. Асимметрия

$$A_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого (правая часть кривой более пологая), и отрицателен в противном случае. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то его коэффициент асимметрии равен нулю.

22. Эксцесс

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Коэффициент эксцесса нормального распределения равен нулю. Он положителен, если пик распределения около математического ожидания острый, и отрицателен, если пик гладкий.

III. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ОНЛАЙН

23. Биномиальное распределение (дискретное)

X – количество «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких что вероятность «успеха» в каждом из них равна p . $q = 1 - p$.

Закон распределения X имеет вид:

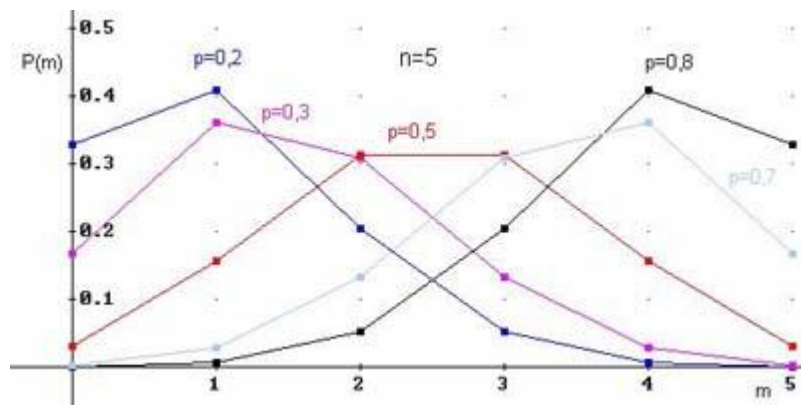
x_k	0	1	k	n
p_k	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$		$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$		p^n

Здесь вероятности находятся по формуле Бернулли:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Характеристики: $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$.

Примеры многоугольников распределения для $n = 5$ и различных вероятностей.



24. Пуассоновское распределение (дискретное)

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

При условии $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $np \rightarrow \lambda = \text{const}$ закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона. Так как при этом вероятность p события A в каждом испытании мала, то закон распределения Пуассона называют часто законом редких явлений.

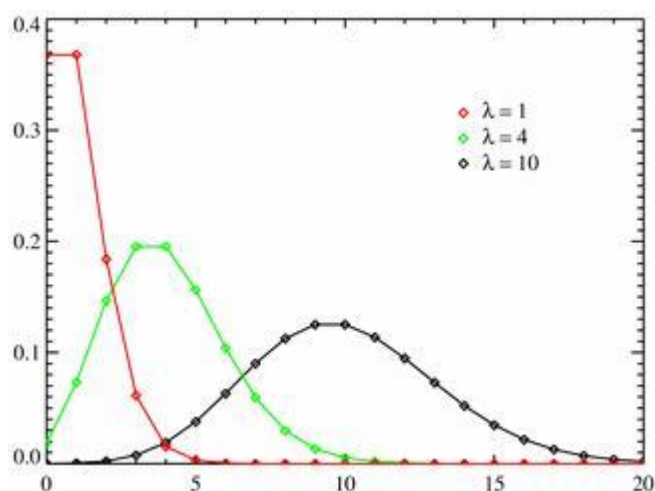
Ряд распределения:

x_k	0	1	k
p_k	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Вероятности вычисляются по формуле Пуассона: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Числовые характеристики: $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

Разные многоугольники распределения при $\lambda = 1; 4; 10$.



25. Показательное распределение (непрерывное)

Экспоненциальное или показательное распределение – абсолютно непрерывное распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

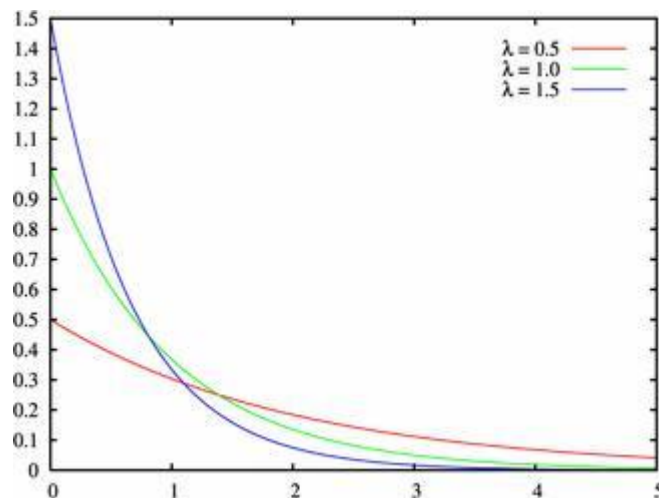
Плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

Числовые характеристики: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

Плотность распределения при различных значениях $\lambda > 0$.



26. Равномерное распределение (непрерывное)

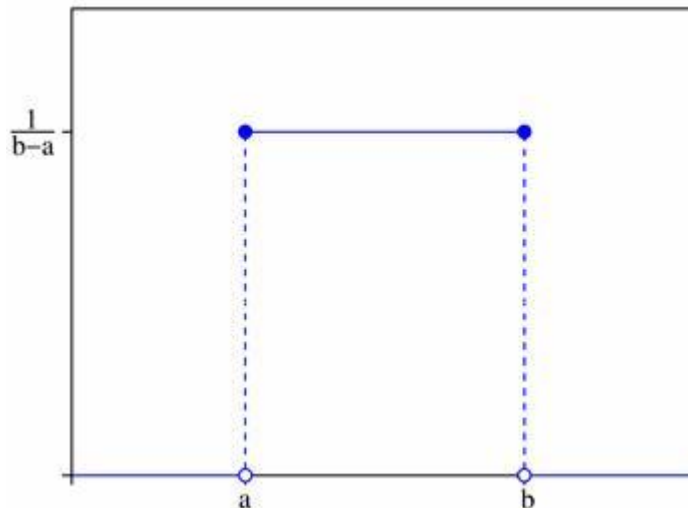
Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке $[-0,5; 0,5]$), в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчиненных заданному распределению.

Плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Числовые характеристики: $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

График плотности вероятностей следующий.



27. Нормальное распределение или распределение Гаусса (непрерывное)

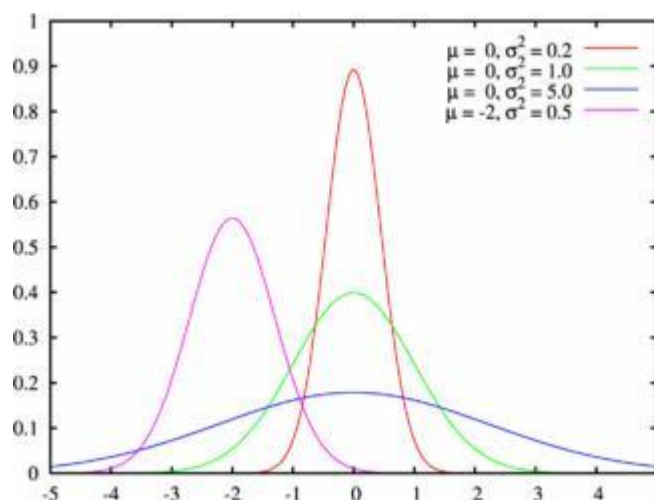
Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса, – распределение вероятностей, которое играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике. Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех. Ясно, что такая ситуация крайне распространена, поэтому можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение – отсюда и произошло одно из его названий.

Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Числовые характеристики: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma = \sigma$

Пример плотности распределения следующий.



Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется стандартным или нормированным, а соответствующая нормальная кривая – стандартной или нормированной.

Функция Лапласа
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X на величину δ от математического ожидания (по модулю).

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

IV. ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

28. Неравенство Чебышева

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

29. Неравенство Маркова

$$P(X \leq \varepsilon) > 1 - \frac{MX}{\varepsilon}$$

30. Математическое ожидание функции одной случайной величины

$$M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i$$

31. Корреляционный момент системы случайных величин X и Y

$$\mu_{XY} = M([X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$$

32. Коэффициент корреляции системы случайных величин X и Y

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

33. Пуассоновский поток событий

$$p_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

Статистические показатели			
Описательная статистика	Непрерывные данные	Коэффициент сдвига	Среднее (Арифметическое, Геометрическое, Гармоническое) · Медиана · Мода
		Вариация	Размах · Ранг · Среднеквадратическое отклонение · Коэффициент вариации · Квантиль (Дециль, Перцентиль/Перцентиль/Центиль)
		Моменты	Математическое ожидание · Дисперсия · Асимметрия · Эссес
	Дискретные данные	Частота · Таблица контингентности	
Статистический вывод и проверка гипотез	Статистический вывод	Доверительный интервал (Частотная вероятность) · Достоверный интервал (Байесовский вывод) · Статистическая значимость · Мета-анализ	
	Планирование эксперимента	Генеральная совокупность · Планирование выборки · Районированная выборка · Репликация · Группировка · Чувствительность и специфичность	
	Объём выборки	Статистическая мощность · Мера эффекта · Стандартная ошибка	
	Общая оценка	Байесовская оценка решения · Метод максимального правдоподобия · Метод моментов нахождения оценок · Оценка минимального расстояния · Оценка максимального интервала	
	Статистические критерии	Z-тест · t-критерий Стьюдента · Критерий Фишера · Критерий Пирсона (Хи-квадрат) · Критерий согласия Колмогорова · Тест Вальда · U-критерий Манна — Уитни · Критерий Уилкоксона · Критерий Краскала — Уоллиса · Критерий Кокрена · Критерий Лиллиефорса	
	Анализ выживания	Функция выживания · Оценка Каплана — Мейера · Логранк-тест · Интенсивность отказов · Пропорциональная модель опасностей	
	Корреляция и регрессия	Корреляция	Коэффициент корреляции Пирсона · Ранг корреляций (Коэффициент Спирмана для ранга корреляций, Коэффициент тау Кендалла для ранга корреляций) · Переменная смешивания
Линейные модели		Основная линейная модель · Обобщённая линейная модель · Анализ вариаций · Ковариационный анализ	
Регрессия		Линейная · Нелинейная · Непараметрическая регрессия · Полупараметрическая регрессия · Логистическая регрессия	
Графические методы	Столбчатая диаграмма · Совмещённая диаграмма · Диаграмма управления · Лесная диаграмма		
	· Гистограмма · Q-Q диаграмма · Диаграмма выполнения · Диаграмма разброса · Охрипичная диаграмма		
	· Стебель-листья · Ящик с усами		

Таблица сопряженности

Таблица сопряженности, или **таблица контингентности**, **факторная таблица** в статистике – средство представления совместного распределения двух переменных, предназначенное для исследования связи между ними. Таблица сопряженности является наиболее универсальным средством изучения статистических связей, так как в ней могут быть представлены переменные с любым уровнем измерения. Таблицы сопряженности часто используются для проверки гипотезы о наличии связи между двумя признаками с использованием точного теста Фишера или критерия согласия Пирсона.

Структура таблицы

Строки таблицы сопряженности соответствуют значениям одной переменной, столбцы – значениям другой переменной, при этом количественные шкалы предварительно должны быть сгруппированы в интервалы. Например, таблица сопряженности может быть использована для показа зависимости музыкальных предпочтений от места проживания слушателей.

	Кантри	Рокн-ролл	Джаз	Всего		y_1	y_2	y_3	
Город	15	30	5	50	x_1	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$f_{1,3}$	$f_{1.}$
Село	25	20	5	50	x_2	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$f_{2,3}$	$f_{2.}$
Всего	40	50	10	100		$f_{.1}$	$f_{.2}$	$f_{.3}$	n

На пересечении строки и столбца указывается частота совместного появления f_{ij} соответствующих значений двух признаков x_i и y_j . Сумма частот по строке $f_{i.}$ называется маргинальной частотой строки; сумма частот по столбцу $f_{.j}$ – маргинальной частотой столбца. Сумма маргинальных частот равна объему выборки n ; их распределение представляет собой одномерное распределение переменной, образующей строки или столбцы таблицы. В таблице сопряженности могут быть представлены как абсолютные, так и относительные частоты (в долях или процентах). Относительные частоты могут рассчитываться по отношению: а) к маргинальной частоте по строке; б) к маргинальной частоте по столбцу; в) к объему выборки.

Примеры построения доверительных интервалов

Существуют два основных метода построения доверительных интервалов: байесовский метод и метод доверительных интервалов, предложенный Нейманом. Применяя метод построения доверительных интервалов, основанный на формуле Байеса, исходят из предположения, что оцениваемый параметр сам случаен. Предполагается также, что известно априорное распределение параметра. Этот метод часто неприменим, так как оцениваемая величина на практике является просто неизвестной постоянной, а не случайной величиной. Кроме того, ее распределение бывает также неизвестным. От этих недостатков свободен метод доверительных интервалов. Рассмотрим примеры построения доверительных интервалов в ряде случаев.

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Пусть по выборке достаточно большого объема, $n > 30$, и при заданной доверительной вероятности γ необходимо определить доверительный интервал для математического ожидания $M[X] = m$, в качестве оценки которого

используется среднее арифметическое (среднее выборочное)
$$\bar{X}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i$$

Закон распределения оценки математического ожидания близок к нормальному (распределение суммы независимых случайных величин с конечной дисперсией асимптотически нормально). Если потребовать абсолютную надежность оценки математического ожидания, то границы доверительного интервала будут бесконечными $(-\infty, +\infty)$. Выбор любых более узких границ связан с риском ошибки, вероятность которой определяется уровнем значимости $1 - \gamma$, где значения γ выбираются достаточно близкими к единице, например, 0,9, 0,95, 0,98, 0,99. Величину γ называют надежностью или доверительной вероятностью. Интерес представляет максимальная точность оценки, т.е. наименьшее значение интервала. Для симметричных функций минимальный интервал тоже будет симметричным относительно оценки \bar{X}_B . В этом случае выражение для доверительной вероятности имеет вид $P(|\bar{X}_B - m| < \delta) = \gamma$, где δ – абсолютная погрешность оценивания.

Нормальный закон $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ полностью определяется двумя параметрами – математическим ожиданием $m = a$ и дисперсией σ^2 .

Величина \bar{X}_B является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой математического ожидания, поэтому ее значение принимаем за значение математического ожидания в качестве точечной оценки. Будем полагать, что дисперсия σ^2 известна, тогда выборочное среднее \bar{X}_B – нор-

мально распределенная случайная величина с параметрами $\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Для такой случайной величины вероятность попадания на симметричный относительно математического ожидания интервал выражается через функцию

Лапласа
$$P(|\bar{X}_B - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t) = \gamma \quad , \quad \text{где} \quad t = \left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

При заданной надежности γ , уравнение $2\Phi(t) = \gamma$ можно решить приближенно с помощью таблицы значений функции Лапласа (приложение, табл. 1).

Если точного значения $\frac{\gamma}{2}$ в списке значений нет, то надо найти два бли-

жайших к нему значения, одно большее, а другое меньшее, чем $\frac{\gamma}{2}$, и найти их среднее арифметическое. Известное значение параметра t позволяет

записать абсолютную погрешность $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Теперь можно указать сим-

метричный интервал $P\left(\left|\bar{X}_B - a\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\bar{X}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$.
Полученное соотношение означает, что доверительный

интервал $\left(\bar{X}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a (математическое ожидание) с вероятностью (надежностью) $P = \gamma$, а

точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

При фиксированном объеме выборки из оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ следует, что чем больше доверительная вероятность γ , тем шире границы доверительного интервала (тем больше ошибка в оценке математического ожидания). Чтобы снизить ошибку в оценке значения, можно увеличить объем выборки. При этом, чтобы снизить относительную погрешность на порядок, необходимо увеличить объем выборки на два порядка.

Задача 1. По данным наблюдений случайной величины X найти доверительный интервал для математического ожидания $m = M[X] = a$ с надежностью $\gamma = 0,95$, если известна дисперсия $D[X] = \sigma^2 = 70$. Выборка представлена таблицей.

Таблица 3

Частичные интервалы (x_i, x_{i+1})	(10;20)	(20;30)	(30;40)	(40;50)
Частоты	10	45	30	15
$x_i^* = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$	15	25	35	45

Решение задачи 1. Найдем объем выборки, для чего просуммируем указанные в таблице частоты: $n = 10 + 45 + 30 + 15 = 100$. Среднее

выборочное значение вычислим по формуле $\bar{X}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i n_i =$

$= \frac{1}{100} (15 \cdot 10 + 25 \cdot 45 + 35 \cdot 30 + 45 \cdot 15) = 30$. По заданной надежности $\gamma = 0,95$ найдем, с помощью таблицы, параметр t : $2\Phi(t) = \gamma = 0,95$, откуда $\Phi(t) = 0,475$, $t = 1,96$. Получим доверительный интервал для математического ожидания

$$\left(\bar{X}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$
 $= \left(30 - \frac{1,96 \sqrt{70}}{\sqrt{100}} < a < 30 + \frac{1,96 \sqrt{70}}{\sqrt{100}} \right)$. Проведем вычисления и окончательно запишем, что $(28,36 < a < 31,64)$. Таким образом, интервал $(28,36; 31,64)$ покрывает параметр $m = M[X] = a$ с надежностью $\gamma = 0,95$ при известной дисперсии $D[X] = \sigma^2 = 70$.

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Во многих случаях предположение о нормальном распределении случайной величины \bar{X}_B становится приемлемым при $n > 4$ и вполне хорошо оправдывается при $n > 10$. Оценка \bar{X}_B вполне пригодна для применения вместо $m = M[X]$. Но не так обстоит дело с дисперсией. Правомочность ее замены на выборочную

дисперсию
$$\bar{D}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \bar{X}_B)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i^2 - \bar{X}_B^2$$
 не обоснована даже в указанных случаях. При небольшом объеме выборки, $n < 30$, закон распределения оценки дисперсии принимать за нормальный неоправданно. Ее распределение следует аппроксимировать распределением хи-квадрат как суммы квадратов центрированных величин (хи-квадрат распределение сходится к нормальному при количестве слагаемых, превышающем 30). Но это утверждение обосновано только тогда, когда случайная величина X распределена нормально.

Рассмотрим случайные величины
$$S^2 = \frac{n}{n-1} \bar{D}_B = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \bar{X}_B)^2$$
 (исправленную выборочную дисперсию – несмещенную оценку дисперсии

σ^2) и $T_{n-1} = \frac{\bar{X}_B - a}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}} \right)}$. Тогда случайная величина T_{n-1} имеет распределение

Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Функция плотности распределения этой

случайной величины имеет вид
$$f(x, n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma(\frac{n-1}{2})} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$
 Распределение Стьюдента симметричное, поэтому полученное соотношение между точностью, надежностью оценки и объемом выборки сохраняется.

Выберем число t_γ так, чтобы выполнялось неравенство $P(|T_{n-1}| < t_\gamma) = P(-t_\gamma < T_{n-1} < t_\gamma) = \gamma$. Из определения функции плотности распределения Стьюдента, значения границ интервала для параметра T_{n-1} можно записать как решение интегрального уравнения:

$$P(|T_{n-1}| < t_\gamma) = P(-t_\gamma < T_{n-1} < t_\gamma) = \int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} f(x, n) dx = \gamma$$

Решение этого интегрального уравнения обозначается $t_\gamma = t(\gamma, n)$ и приводится в статистических таблицах. В данном пособии значения этой величины приведены в приложении, табл. 2. Кроме того, значения $t_\gamma = t(\gamma, n)$ при различных γ и n можно получить, используя программы EXCEL, MATHCAD, MAPLE. Соответствующие команды даны в таблице.

MAPLE	$> \text{with(stats): statevalf[icdf, studentst}[n]]\left(\frac{1+\gamma}{2}\right);$
MATHCAD	$qt\left(\frac{1+\gamma}{2}, n\right)$
EXCEL	$= \text{стьюдраспобр}(1-\gamma, n)$

Приведем неравенство $(-t_\gamma < T_{n-1} < t_\gamma)$ к эквивалентному виду $-t_\gamma < \frac{\bar{X}_B - a}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} < t_\gamma$, или $\bar{X}_B - t_\gamma \cdot \left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right) < a < \bar{X}_B + t_\gamma \cdot \left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$. Это неравенство задает доверительный интервал для математического ожидания $a = M[X]$ с надежностью γ :

$$P\left(a \in \left(\bar{X}_B - t_\gamma \cdot \left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right), \bar{X}_B + t_\gamma \cdot \left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \gamma.$$

Заметим, что полученный доверительный интервал похож на тот, что был получен при условии известной

дисперсии: $\left(\bar{X}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \right)$. Разница состоит в том, что неизвестное значение σ заменяется во втором случае его выборочной оценкой S , а числа t_γ находятся из распределения Стьюдента, вместо чисел t , которые находятся из нормального распределения. Кроме того, при больших объемах выборки $n \geq 100$ можно считать, что, практически, $t_\gamma = t$, а $S = \sigma$. В этом случае можно пользоваться формулами нормального распределения.

Задача 2. В условиях задачи 1 найти доверительный интервал для математического ожидания с надежностью $\gamma = 0,95$, если дисперсия неизвестна.

Решение задачи 2. Для удобства вычислений и наглядности еще раз представим таблицу значений.

Частичные интервалы (x_i, x_{i+1})	(10;20)	(20;30)	(30;40)	(40;50)
Частоты	10	45	30	15
$x_i^* = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$	15	25	35	45

Объем выборки составляет $n = 100$. Среднее выборочное значение $\bar{X}_B = 30$. Вычислим дисперсию $\bar{D}_B = (\overline{X_B^2}) - \bar{X}_B^2$ и исправленную дисперсию S^2 .

Поскольку $(\overline{X_B^2}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 = \frac{1}{100} (15^2 \cdot 10 + 25^2 \cdot 45 + 35^2 \cdot 30 + 45^2 \cdot 15) = 975$,

то $\bar{D}_B = 975 - 30^2 = 75$, а исправленная дисперсия $S^2 = \frac{n}{n-1} \bar{D}_B = \frac{100}{99} \cdot 75 \approx 75,76$, $S = \sqrt{75,76} \approx 8,7$. Объем заданной выборки доста-

точно большой, $n = 100$. Поэтому можно использовать как распределение Стьюдента, так и нормальное распределение. Рассмотрим оба варианта.

Вариант 1 (нормальный закон распределения). Будем полагать, что $t_\gamma = t$, а $S = \sigma$. По заданной надежности $\gamma = 0,95$ найдем, с помощью табл. 1 (приложение), параметр t : $2\Phi(t) = \gamma = 0,95$, откуда $\Phi(t) = 0,475$,

$t=1,96$. Получим доверительный интервал для математического ожидания $\left(\bar{X}_B - \frac{tS}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_B + \frac{tS}{\sqrt{n}} \right) = \left(30 - \frac{1,96 \cdot 8,7}{\sqrt{100}} < a < 30 + \frac{1,96 \cdot 8,7}{\sqrt{100}} \right)$.

Проведем вычисления и окончательно запишем, что $(28,29 < a < 31,71)$.

Таким образом, интервал $(28,29; 31,71)$ покрывает параметр $m = M[X] = a$ с надежностью $\gamma = 0,95$ при неизвестной дисперсии.

Вариант 2 (закон распределения Стьюдента). По заданной надежности $\gamma = 0,95$ найдем, с помощью табл. 2 (приложение),

параметр $t_\gamma = t(\gamma, n)$: $t_\gamma = t(0,95, 100) = 1,984$. Запишем доверительный интервал для математического ожидания

$$\left(\bar{X}_B - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_B + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} \right) = \left(30 - \frac{1,984 \cdot 8,7}{\sqrt{100}} < a < 30 + \frac{1,984 \cdot 8,7}{\sqrt{100}} \right)$$

Проведем вычисления и окончательно получим, что $(28,274 < a < 31,726)$.

Таким образом, интервал $(28,274; 31,726)$ покрывает параметр $m = M[X] = a$ с надежностью $\gamma = 0,95$ при неизвестной дисперсии.

Можно заметить, что если значение S близко к σ , то доверительный интервал, полученный с применением закона распределения Стьюдента, будет более широким, чем доверительный интервал, полученный с применением формул нормального распределения, так как $t_\gamma > t$. Это объясняется тем, что распределение Стьюдента применяется при выборках малых объемов, содержащих недостаточный объем информации.

Задача 3. По данным наблюдений случайной величины X , распределенной нормально, найти доверительный интервал для математического ожидания $m = M[X] = a$ с надежностью $\gamma = 0,95$. Выборка представлена таблицей.

Частичные интервалы (x_i, x_{i+1})	(5;10)	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)
Частоты	1	5	8	4	2
$x_i^* = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5

Решение задачи 3. Найдем объем выборки: $n = 1 + 5 + 8 + 4 + 2 = 20$. Поскольку объем выборки невелик, то применение нормального закона распределения приведет к неоправданному сужению доверительного

интервала, поэтому используем формулы, полученные для распределения Стьюдента. Вычислим необходимые параметры:

$$\bar{X}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i = \frac{1}{20} (7,5 \cdot 1 + 12,5 \cdot 5 + 17,5 \cdot 8 + 22,5 \cdot 4 + 27,5 \cdot 2) = 17,75$$

$$(\overline{X_B^2}) = \frac{1}{20} (7,5^2 \cdot 1 + 12,5^2 \cdot 5 + 17,5^2 \cdot 8 + 22,5^2 \cdot 4 + 27,5^2 \cdot 2) = 341,25$$

$$\bar{D}_B = (\overline{X_B^2}) - \bar{X}_B^2 = 341,25 - 17,75^2 = 26,19$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \bar{D}_B = \frac{20}{19} \cdot 26,19 \approx 27,568, \quad S = \sqrt{27,568} \approx 5,25$$

По заданной надежности $\gamma = 0,95$ найдем, с помощью табл. 2

(приложение), параметр $t_\gamma = t(\gamma, n)$: $t_\gamma = t(0,95; 20) = 2,093$. Доверительный интервал для математического ожидания

$$\left(\bar{X}_B - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_B + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} \right) = \left(17,75 - \frac{2,093 \cdot 5,257}{\sqrt{20}} < a < 17,75 + \frac{2,093 \cdot 5,257}{\sqrt{20}} \right)$$

или $(15,293 < a < 20,207)$. Таким образом, интервал $(15,293; 20,207)$ покрывает параметр $m = M[X] = a$ с надежностью $\gamma = 0,95$ при неизвестной дисперсии.

Доверительный интервал для дисперсии при известном математическом ожидании

Пусть (x_1, x_2, \dots, x_n) – выборка наблюдений из нормальной генеральной совокупности. Найдем доверительный интервал для дисперсии $D[X] = \sigma^2$ нормально распределенного признака X с известным математическим ожиданием $M[X] = a$. Поскольку значение математического ожидания известно, то в качестве оценки величины σ^2

$$\bar{D}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - a)^2$$

возьмем точечную оценку дисперсии, которую будем рассматривать как случайную величину, зависящую от случайной

выборки. Тогда величина $Z_n = \frac{n\bar{D}_B}{\sigma^2}$ является суммой квадратов

значений $Y_i = \frac{x_i - a}{\sigma}$. Эти величины имеют стандартное нормальное

распределение с параметрами (0,1), а сумма $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ имеет χ^2 (хи-квадрат) распределение Пирсона с n степенями свободы. Плотность случайной величины, распределенной по закону χ^2 , имеет вид

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\alpha/2} \cdot \Gamma(\alpha/2)} z^{\alpha/2-1} \cdot e^{-z/2}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases},$$

где α — число степеней свободы. Пользуясь плотностью χ^2 — распределения найдем интервал, в который значения Z_n попадают с надежностью γ . Обозначим этот интервал $[h_1, h_2]$. Поскольку распределение χ^2 не является симметричным, то чтобы получить симметричный относительно параметра интервал, значения h_1 и h_2 выберем так, чтобы вероятности попадания значений Z_n левее h_1 и правее h_2 были одинаково

равными $\frac{1-\gamma}{2}$. Тогда $P(h_1 < Z_n < h_2) = \int_{h_1}^{h_2} f(z) dz = \gamma$. Числа h_1 и h_2 можно отыскать по специальной таблице критических точек

распределения χ^2 , исходя из того, что $P(Z_n < h_1) = \frac{1-\gamma}{2}$, $P(Z_n < h_2) = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$. После того, как числа h_1 и h_2 выбраны, возможно определить доверительный интервал для дисперсии $D[X] = \sigma^2$.

Так как $Z_n = \frac{n\bar{D}_B}{\sigma^2}$, то неравенство $(h_1 < Z_n < h_2)$ преобразуется к неравенству $h_1 < \frac{n\bar{D}_B}{\sigma^2} < h_2$ или, в эквивалентном виде, $\frac{n\bar{D}_B}{h_2} < \sigma^2 < \frac{n\bar{D}_B}{h_1}$.

Это двойное неравенство означает, что доверительным интервалом

для $D[X] = \sigma^2$ с надежностью γ является промежуток $\left(\frac{n\bar{D}_B}{h_2}; \frac{n\bar{D}_B}{h_1} \right)$.

Замечание. Таблицы критических точек h_1 и h_2 распределения χ^2 содержат два параметра: уровень значимости α , определяемый

значениями $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$, а также число степеней свободы k , равное объему выборки n . Критические значения в таблицах чаще всего обозначаются $\chi_{\alpha,n}^2$.

Приведем для справки команды, с помощью которых можно получить $\chi_{\alpha,n}^2$ при разных значениях α и n , в таких программах как EXCEL, MATHCAD, MAPLE.

MAPLE	$> with(stats): statevalf[icdf, chisquare[n]](1 - \alpha);$
MATHCAD	$qchisq(1 - \alpha, n)$
EXCEL	$= xu2obp(\alpha, n)$

Доверительный интервал для дисперсии при неизвестном математическом ожидании

Найдем доверительный интервал для дисперсии $D[X] = \sigma^2$ нормально распределенного признака X с неизвестным математическим ожиданием. При выводе интервальной оценки, в случае известного математического

ожидания, мы пользовались величиной $\bar{D}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - a)^2$. Теперь это значение использовать нельзя, поэтому в качестве несмещенной оценки дисперсии будем использовать исправленную выборочную

дисперсию $S^2 = \frac{n}{n-1} \bar{D}_B$. Случайная величина $Z_{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ имеет

распределение Пирсона χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы. Выберем близкую к единице вероятность γ и найдем интервал, в который попадает неизвестный параметр с надежностью γ . Для этого повторим рассуждения предыдущего раздела и получим, что оцениваемое значение

дисперсии $D[X] = \sigma^2$ с надежностью γ покрывается доверительным интервалом $\left(\frac{(n-1)S^2}{h_2}; \frac{(n-1)S^2}{h_1} \right)$.

Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратичное отклонение σ по исправленному среднему квадратичному отклонению S . Для этого найдем доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр σ с надежностью γ . В сущности, задача повторяет предыдущий раздел, но сейчас мы немного изменим обозначения для упрощения записи результата. Выражение для доверительной вероятности имеет вид $P(|\sigma - S| < \delta) = \gamma$, где δ –

абсолютная погрешность оценивания. Неравенство $|\sigma - S| < \delta$ или равносильное ему неравенство $S - \delta < \sigma < S + \delta$ преобразуем к

виду $S\left(1 - \frac{\delta}{S}\right) < \sigma < S\left(1 + \frac{\delta}{S}\right)$. Обозначим $\frac{\delta}{S} = q$ и, поскольку абсолютную погрешность оценивания мы выбираем достаточно малой, можно считать,

что $0 < q < 1$. Перепишем неравенство в виде $\frac{1}{S(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{S(1-q)}$,

домножим на $S\sqrt{n-1}$, получим $\frac{\sqrt{n-1}}{(1+q)} < \frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{(1-q)}$. Из

предыдущего раздела известно, что случайная величина $Z_{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

имеет распределение Пирсона χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы. Поэтому

переменную $\frac{\delta}{S} = q$ можно выразить через значения критических точек h_1 и h_2 распределения Пирсона и записать эти значения в таблицу (в

приложении значения параметра $q = q(\gamma, n)$ приведены в табл. 3, приложение). Вычислив по выборке значение S и найдя по таблице q , получим искомый доверительный интервал для среднего квадратичного

отклонения, покрывающий параметр σ с заданной надежностью γ : $S(1-q) < \sigma < S(1+q)$.

Замечание. В случаях, когда оценивается математическое ожидание при неизвестной дисперсии или дисперсия при неизвестном математическом ожидании, получающиеся при этом доверительные интервалы оказываются длиннее тех, что получены, когда, соответственно, дисперсия или математическое ожидание были известны. Это обстоятельство объясняется тем, что наличие дополнительной информации позволяет сузить пределы, в которые можно заключить оцениваемый параметр при заданной надежности.

Задача 4. В условиях задачи 3 найти доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения σ с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение задачи 4. Для удобства вычислений и наглядности еще раз представим таблицу значений.

Частичные интервалы (x_i, x_{i+1})	(5;10)	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)
Частоты	1	5	8	4	2
$x_i^* = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5

Объем выборки: $n = 20$, среднее выборочное значение $\bar{X}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i = 17,75$, выборочная дисперсия $\bar{D}_B = 26,19$, исправленная дисперсия $S^2 = \frac{n}{n-1} \bar{D}_B \approx 27,568$, исправленное выборочное среднее квадратичное отклонение $S = \sqrt{27,568} \approx 5,25$. Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения определяется неравенством $S(1-q) < \sigma < S(1+q)$. По заданной надежности $\gamma = 0,95$ и объему выборки $n = 20$ найдем, с помощью табл. 3 (приложение), параметр $q = q(\gamma, n)$: $q = q(0,95; 20) = 0,37$. Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения $(S(1-q) < \sigma < S(1+q)) = (5,25(1-0,37) < \sigma < 5,25(1+0,37))$ или $(3,308 < \sigma < 7,193)$. Таким образом, интервал $(3,308; 7,193)$ покрывает параметр σ с надежностью $\gamma = 0,95$.

Доверительный интервал для вероятности биномиального распределения

Предположим, что проводится серия независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A с одной и той же, но неизвестной нам вероятностью P . Причем вероятность появления события A в каждом опыте не зависит от исходов других испытаний. Такие испытания называются независимыми относительно данного события A . Пусть проведено n независимых испытаний. Случайная величина Y представляет собой число появления события A в данной серии испытаний. Возможными значениями этой случайной величины являются целые числа от 0 до n . Вероятности этих возможных значений

определяются по формуле Бернулли $P_n(Y=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Закон распределения такой случайной величины называется биномиальным. Математическое ожидание этой случайной величины $M[Y] = np$, дисперсия $D[Y] = np(1-p)$.

В реальной ситуации, если проводится серия из n независимых испытаний и требуется найти неизвестную вероятность появления события A в каждом отдельном испытании, поступают следующим образом. Появлению события в отдельном испытании поставим в соответствие число 1, а если событие не появилось, то поставим в соответствие этому число 0. Тогда можно говорить о случайной величине X , которая принимает два значения: 1 и 0. Любая выборка значений X состоит из нулей и единиц. Причем число единиц равно количеству появлений события A в n опытах.

В качестве точечной оценки неизвестного параметра – вероятности P –

возьмем частоту появления события в данной серии испытаний: $p^* = \frac{m^*}{n}$, где m^* – число единиц в случайной выборке X_1, X_2, \dots, X_n . Оценка p^* является несмещенной оценкой параметра P .

Найдем доверительный интервал, который покрывает неизвестный параметр с надежностью γ . Если оцениваемая вероятность не слишком мала и не слишком велика ($0,05 < p < 0,95$), то можно считать, что распределение случайной величины p^* близко к нормальному. Этим допущением можно пользоваться, если np и $n(1-p)$ больше четырех. Выберем при заданной

надежности γ числа (θ^-, θ^+) так, чтобы выполнялись неравенства $P(p^* < \theta^-) \leq \frac{1-\gamma}{2}$ и $P(p^* > \theta^+) \leq \frac{1-\gamma}{2}$. Тогда вероятность попадания значения p^* в интервал (θ^-, θ^+) будет равна $P(\theta^- \leq p^* \leq \theta^+) \geq 1 - \frac{1-\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} = \gamma$. Для практического нахождения доверительных интервалов с надежностью $\gamma = 0,95$ и $\gamma = 0,99$ при n от 1 до 30, а также при $n = 40$ и $n = 50$ можно воспользоваться заранее составленными таблицами, которые можно найти в справочниках по математической статистике.

При больших объемах выборки можно обойтись приближенным построением доверительного интервала. Воспользуемся формулой вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности p в независимых

испытаниях
$$P\left(\left|\frac{m^*}{n} - p\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = \gamma$$
.

Обозначим $\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = t_\gamma$ и, с помощью таблицы значений функции

Лапласа, решим уравнение $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$. Из полученного значения t_γ най-

дем
$$\delta = \left(\frac{t_\gamma \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right).$$

Тогда $\theta^- \approx p - \frac{t_\gamma \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$, $\theta^+ \approx p + \frac{t_\gamma \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$. Чтобы получить доверительный интервал для p , нужно выполнить еще ряд преобразований, который мы в данном случае не будем приводить. Заметим только, что при большом объеме выборки ($n \geq 100$) малыми слагаемыми можно пренебречь и получить приближенное значение для

доверительного интервала в виде:
$$p \in \left(p^* - \frac{t_\gamma \sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}; p^* + \frac{t_\gamma \sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}\right).$$